



PRINCIPALES HITOS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EL SIGLO XX

Segundo Gutiérrez Cabria



ÁTEDRA
DE EMÉRITOS

de la Comunidad Valenciana



PRINCIPALES HITOS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EL SIGLO XX

Segundo Gutiérrez Cabria

Edita: ©



«TEDRA
DE EMÉRITOS
de la Comunidad Valenciana

C/ Sant Xavier, 5 - 46015 Valencia - Tel. 96 349 21 63
email: catedraemeritos@funcae.es-www.catedraemeritos.com

Autor:

© Segundo Gutiérrez Cabria

Coordinan:

Vicente López Merino
Concha Albalat Criado
Salvador Aldana Fernández
Juan Cuenca Anaya
Amando García Rodríguez

D. L.: V-2363-2008

I.S.B.N.: 978-84-612-4283-2

Maquetación e impresión:

Gráficas Antolín Martínez. s.l.
Tel. 96 391 89 84 - www.grafamar.com

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN GENERAL	7
1. LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS DEL S. XX ..	15
1.1. Introducción.....	15
1.2. Ojeada retrospectiva al siglo XX.....	16
1.3. La reducción de la aritmética	19
1.4. La formalización de Hilbert	22
1.5. Los teoremas de Gödel	23
1.6. La semántica de Tarski	24
1.7. El intuicionismo de Brouwer	25
1.8. Otras aportaciones de la matemática durante el s. XX	27
2. LAS MATEMÁTICAS EN LA FÍSICA DEL SIGLO XX	33
2.1. Introducción.....	33
2.2. Las teorías de la relatividad de Einstein.....	34
2.2.1. Teoría de la relatividad restringida	35
2.2.2. Relatividad general	37
2.3. La teoría de los cuantos	37
2.4. Física atómica y nuclear.....	40
2.5. Consideraciones finales.....	43
3. LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD EN EL SIGLO XX...	47
3.1. Introducción.....	47
3.2. La probabilidad como medida	48
3.3. Teoremas del límite	50
3.4. El concepto filosófico de probabilidad	51
3.5. Las interpretaciones de la probabilidad	52
3.5.1. Interpretaciones frecuenciales	54

3.5.2. La probabilidad como propensión o "chance" objetiva	55
3.5.3. La probabilidad como relación lógica objetiva ...	56
3.5.4. Interpretaciones subjetivistas.....	58
3.6. Valoración de las teorías	60
3.6.1. Teorías frecuencias	61
3.6.2. Probabilidades físicas	62
3.6.3. Probabilidad lógico-objetiva	62
3.6.4. La definición clásica de probabilidad.....	63
3.6.5. Teorías subjetivas.....	63
3.6.6. A modo de conclusión; ¿sí o no a la probabilidad?	64
4. LA ESTADÍSTICA DEL SIGLO XX.....	67
4.1. Introducción.....	67
4.2. Naturaleza de la estadística.....	68
4.3. Evolución de la estadística en el siglo XX.....	70
4.4. Contenidos básicos de la estadística del siglo XX	78
4.4.1. El modelo de la situación real.....	78
4.4.2. La información estadística.....	83
4.4.3. Valoración y decisión.....	85
4.5. La estadística y el método científico.....	87
4.6. El Análisis de Datos.....	92
4.6.1. Introducción	92
4.6.2. Análisis inferencial de datos	93
4.6.3. Análisis exploratorio de datos.....	94
4.6.4. Análisis inicial de datos.....	97
4.6.5. El examen cruzado de datos.....	101

PRINCIPALES HITOS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EL SIGLO XX

Introducción general

El pensamiento del siglo XX ha sido condicionado por una serie de acontecimientos que conviene tener en cuenta a la hora de analizar su especificidad. Entre ellos, destacamos los siguientes.

El siglo XX nos ofreció, ante todo, el escenario mundial de dos grandes guerras que, paradójicamente, darían un impulso al desarrollo del conocimiento científico en aquellas áreas en que se advertían necesidades y, principalmente, las relacionadas con la tecnología militar. Este desarrollo dio lugar, incluso, al holocausto nuclear de la década de los años cuarenta.

El segundo hecho fue que, acabada la Segunda Guerra Mundial, se formaron dos grandes bloques militares, económicos y políticos, que se enfrascaron en una guerra fría, desarrollaron una irracional carrera armamentista, y fomentaron la hipertrofia de un complejo militar industrial.

El tercer acontecimiento fue la independencia de la mayor parte de las colonias de África y Asia, lo que contribuyó al derrumbe del sistema colonial mundial, que había servido como fuente de riqueza para las metrópolis.

Señalemos, finalmente, que, ya a finales de la década de los años ochenta y principios los noventa, con el derrumbe del sistema socialista en el este europeo, se establecieron las bases de un mundo unipolar, caracterizado por un proceso de globalización que si, en principio, pudiera considerarse en bien del intercambio científico-técnico, realmente representa un desafío para la supervivencia del

mosaico de culturas de las naciones emergentes y de sus identidades nacionales.

Por otra parte, la desaparición de la guerra fría y el clima de universal entendimiento, que parecía poder alcanzarse, abría la posibilidad de congelar la irracional carrera de armamentos y desviar estos enormes recursos financieros hacia la esfera del desarrollo. Esto equivale a decir que podría, al fin, inaugurarse la era en que ciencia y tecnología alinearán sus fuerzas en bien de toda la humanidad. Pronto, el optimismo inicial, derivado de semejante razonamiento, se evaporó ante las nuevas realidades.

El progreso de las ciencias debió navegar en medio de tales circunstancias socio-históricas. Comenzó a manifestarse en la aplicación de la ciencia a la economía y en la transformación general de la superestructura de la sociedad humana. Todo ello estuvo precedido por una explosión en el ritmo de la producción de los conocimientos científicos, que alcanzó un crecimiento exponencial. Las relaciones ciencia-sociedad se hicieron más complicadas.

No obstante, se puede afirmar que el avance de las ciencias, en el siglo, es fiel reflejo del desarrollo socioeconómico de los países, resultando tan asimétrico y desigual como la distribución de riquezas.

Desde comienzos del siglo, y muy particularmente desde la segunda Guerra Mundial, la ciencia se manifiesta cada vez más claramente como elemento determinante del porvenir de la humanidad. Es cierto que son, especialmente, las ciencias aplicadas y las técnicas las que intervienen de forma directa, y de un modo cada vez más apremiante, en nuestra existencia cotidiana. Es cierto también que, actualmente, la mayoría de los gobiernos se esfuerzan en llevar a término una política eficiente de investigación científica con vistas a acrecentar el poder material de sus países. Pero el progreso de las técnicas depende, de una manera cada vez más estrecha, del desarrollo de las ciencias puras, mientras que, recíprocamente, cada innovación técnica es utilizada inmediatamente por los teóricos. Del

mismo modo, toda acción de conjunto, que sea coherente con el desarrollo de la investigación científica, debe llevar también, de manera prioritaria, a la investigación fundamental.

Mientras que en los siglos XVII y XVIII el progreso científico era esencialmente el resultado de aportaciones individuales de aficionados o de científicos pensionados por monarcas o academias, el siglo XIX vio aparecer la colaboración entre investigadores en el seno de los laboratorios y de los institutos de investigación, creados junto a establecimientos de enseñanza superior. En el siglo XX, esta evolución hacia el trabajo en equipo se acelera, a fin de compensar los efectos de la especialización creciente, impuesta por la rápida extensión del campo de la ciencia, y para permitir un mejor aprovechamiento de los equipos -cada vez más costosos- necesarios para la continuación de los trabajos de investigación.

Desde el punto de vista de su autodesarrollo, las ciencias, a partir de la segunda mitad del siglo XIX, experimentan una delimitación de los respectivos campos de cada disciplina científica y, a la vez, una tendencia a la interdisciplinariedad. Se advierten, pues, la aparición de ramas de las ciencias de naturaleza "fronteriza", y el acercamiento hacia un mismo objeto de estudio, desde perspectivas diferentes siguiendo luego una intención totalizadora.

El profundo valor cultural de la ciencia no hubiera sido posiblemente suficiente, por sí solo, para mantener este progreso. Por suerte, la constante expansión de los presupuestos de investigación científica y técnica se ve favorecida por la toma de conciencia del hecho de que el porvenir de cada país está en gran medida condicionado por los esfuerzos que se realicen en el campo de la investigación.

Por su misma rapidez y, aún más, por sus repercusiones técnicas, el florecimiento de la ciencia no deja de suscitar ciertas aprensiones, a veces justificadas. En el plano intelectual, la extensión desmesurada del campo de la ciencia, el tecnicismo creciente de las teorías y de los descubrimientos, y la especialización cada vez más estrecha de la mayoría de los investigadores, presentan el riesgo de crear una

incomprensión progresivamente marcada entre los que participan en el progreso científico y el resto de la humanidad. Y esto, porque los segundos no pueden apreciar el espíritu que anima a los primeros, y sólo juzgan a través de las consecuencias materiales del progreso. Este divorcio se ve agravado, además, por la aplicación inmediata que se hace de numerosos descubrimientos con fines militares. Aunque la explosión de la bomba de Hiroshima ha revelado el inmenso poder de destrucción que el progreso técnico ha puesto en manos del hombre, no ha frenado, sin embargo, la competencia en este dominio. Es verdad que la ciencia aprovecha en gran medida esta situación, y que importantes resultados, obtenidos en física nuclear o en investigación espacial, se hubieran visto indudablemente retrasados de forma considerable sin el apoyo masivo y oportuno de los presupuestos militares o paramilitares. Pero, no se pueden ocultar los peligros extremos que esta situación de hecho hace correr a la humanidad. Además, de aquí derivan directamente algunas consecuencias nefastas; por un lado, la política del secreto impuesto para ciertas investigaciones susceptibles de aplicaciones militares; por otro, la angustia de ciertos científicos que se resisten a continuar trabajos cuyo éxito podría conducir a la puesta a punto de nuevas técnicas de destrucción.

La evolución actual de la vida científica lleva consigo otro riesgo muy grave. La necesaria coordinación de los trabajos de los investigadores, la indispensable intervención del poder político en la distribución de los créditos concedidos, presenta, efectivamente, el peligro de reducir en forma considerable la libertad creadora de los investigadores. Libertad que, limitada ya por las servidumbres del trabajo en equipo, puede provocar igualmente un abandono relativo de las investigaciones desinteresadas en provecho de trabajos inmediatamente rentables. Además, ciertos dirigentes políticos pueden intentar imponer una orientación autoritaria, si no a los mismos descubrimientos, sí al menos a la interpretación que de ellos se hace. Algunos hechos, relativamente recientes, confirman la realidad de este peligro, aunque el desarrollo de la cooperación científica inter-

nacional, en el curso de los últimos años, ha mejorado notablemente la situación. Esta cooperación, directa y sincera, lleva a los científicos de todo el mundo a considerarse, más allá de toda frontera política e ideológica, como miembros de una misma comunidad, solidarios en la obra que persiguen.

Los científicos de hoy, aunque no puedan desinteresarse de las diversas consecuencias de sus descubrimientos, tienen los mismos objetivos de conjunto que sus predecesores: la construcción de teorías abstractas, la descripción del mundo físico y el descubrimiento de las leyes que lo rigen, el estudio de la estructura, del comportamiento, de los mecanismos y de la evolución de los seres vivos. Los progresos realizados en estos distintos campos, desde principios del siglo XX, son inmensos y sobrepasan ampliamente en número y en importancia a los de cualquier época anterior de la historia de la humanidad. Sin embargo, sólo se puede juzgar objetivamente la ciencia actual situándola en el marco de la gran corriente de la historia. Algunos admiradores, demasiado entusiastas de los éxitos y de los descubrimientos de nuestro tiempo, subestiman la importancia de la obra admirable realizada, a un ritmo ciertamente más lento, pero con unos medios humanos y materiales mucho más limitados, por los científicos de los siglos pasados.

Los más relevantes exponentes, y la mayoría de la comunidad científica reaccionaron vigorosamente contra el desarrollo del armamento nuclear. El propio Einstein abogó por el desarme internacional y la creación de un gobierno mundial. No faltaron, sin embargo aquéllos que consideraron oportuno continuar la espiral armamentista, confiados en que el liderazgo de un país podía resultar ventajoso para todo el mundo. Entre estos, se contó con el arquitecto principal de la bomba de Hidrógeno, el físico húngaro, nacionalizado estadounidense, Edward Teller.

En la segunda mitad del siglo XX, la rivalidad entre las instituciones científicas del este y oeste constituían un reflejo de la *guerra fría*, que prevaleció hasta bien avanzado el siglo. A la competencia

y el intercambio que alentó, en lo fundamental, el desarrollo de las investigaciones en las primeras décadas entre las Escuelas de Copenhague, Berlín, París, y Londres, le sustituyó un cerrado silencio. El intercambio fue interrumpido, y supuestas filtraciones, al bando opuesto, adquirieron la dramática connotación de espionaje político. Los logros publicables que obtenían los laboratorios nucleares de *Dubna*, en la ex - Unión Soviética, *Darmstad* en Alemania, y *Berkeley* de los Estados Unidos, eran sometidos a encendidas polémicas sobre prioridad, como es el caso del descubrimiento (acaso sería mejor decir "la fabricación" en los aceleradores lineales) de los elementos transféricos que ocupan una posición en la tabla periódica posterior al elemento número 100.

Pero, a pesar del mar de contradicciones, en que debió navegar nuestra nave planetaria, ha sido el XX un siglo de un espectacular salto de la ciencia y la tecnología. Se inauguran la "Era Atómica", la "Edad de los Materiales Sintéticos", los tiempos de la "Conquista del Espacio Sideral", la "Época de la Robótica", el período de "la Informatización", el despegue de "la Ingeniería Genética", etc. En cada una de estas conquistas están presentes las tres ciencias básicas: matemáticas, física y química.



Los teoremas de Kurt Gödel son el inicio de una nueva fundamentación de la Matemática.

1. Los fundamentos de las matemáticas del siglo XX

1.1. Introducción

Lo que han sido las matemáticas del siglo XX tiene mucho que ver con lo que ha sido el propio siglo. Posiblemente nunca haya sido tan fuerte su vínculo con las otras actividades humanas. Hemos de destacar su condición de elemento formal de nuestra cultura. Las matemáticas juegan un papel singular en la educación, mantienen una relación estrecha con las ciencias de la naturaleza y la tecnología, con las ciencias sociales y la historia del pensamiento y con el arte en todas sus manifestaciones. También se evidencia su presencia, a veces clara y a veces oscura, en los cambios políticos, económicos y sociales que se han producido.

Aunque ya nos encontramos en el siglo XXI es bastante temerario hacer un balance de hitos matemáticos del siglo pasado. En primer lugar porque la perspectiva es aún escasa y, en segundo lugar, y más importante, porque las propias características de la Matemática del siglo XX, marcadas por un desarrollo sin precedentes y una amplitud de temas extraordinaria, hace que sea muy difícil por no decir imposible la catalogación de los hitos fundamentales de la ciencia matemática. Esto se debe a diversas causas.

La primera, porque la producción matemática del siglo XX ha superado (en cuanto a extensión, y posiblemente en cuanto a calidad) a la producción en toda la historia anterior. Por citar algunos datos: en la década de los 90 se han publicado una media de más de

50.000 trabajos anuales de investigación matemática en las revistas especializadas del todo el mundo.

Junto a la cantidad de producción, la segunda causa es, sin duda, la diversidad de campos que ella abarca: a lo largo del siglo XX han surgido y se han desarrollado áreas completamente nuevas, y los resultados matemáticos han impregnado prácticamente todas las parcelas de nuestra vida cotidiana. Como resultado de esto, el desarrollo tecnológico y científico del siglo XX no ha tenido parangón en la historia de la humanidad. Conviene no perder de vista esta perspectiva: la matemática es la base, los rieles sobre los que caminan las ciencias y la tecnología; sin un desarrollo matemático no puede haber un desarrollo científico parejo, y la historia está llena de ejemplos que muestran cómo sólo cuando la maquinaria matemática ha desarrollado los conceptos y técnicas adecuadas se han podido dar nuevas teorías y grandes pasos científicos. Citemos tres ejemplos típicos del siglo XX: la *teoría de la relatividad* de **Einstein** sería imposible sin el desarrollo de la geometría diferencial moderna, los estudios sobre *computación*, que de la mano de **von Neumann** contribuyeron al desarrollo de las computadoras, y los trabajos de **Shannon** sobre la *teoría matemática de la comunicación* de los años 1948 y 50, que sentaron las bases de la *teoría de códigos* y, por consiguiente, de la moderna transmisión de datos.

No podemos estudiar adecuadamente la matemática del siglo XX sin dirigir una mirada a algunos geniales matemáticos que florecieron en el siglo anterior.

1.2. Ojeada retrospectiva al siglo XIX

Durante el siglo XIX las disciplinas matemáticas se someten a un proceso de aumento de rigor y a un proceso de reducción a últimos principios. Tal proceso culminará en los años que rodean el 1900 con el descubrimiento de las antinomias, que amenazaron todo el edificio del saber matemático, pero que, al mismo tiempo, plantean una serie de problemas que se cuentan entre los más interesantes y fecundos de la historia de la matemática.

El nacimiento de las geometrías no euclídeas contribuyó al desarrollo del llamado “programa de Hilbert”, que en el congreso de París de 1900 planteó sus famosos 23 problemas. Las investigaciones de Gödel demostrarán más tarde la impracticabilidad de dicho programa. Por otra parte, las propuestas de Hilbert truncan de raíz una de las ideas filosóficas más arraigadas en la tradición occidental, cual es que los axiomas de la geometría euclidiana son verdades evidentes, incontrovertibles y verdaderos, más allá de toda discusión. Al imponerse una teoría del conocimiento, en vez de otra, aparecerán consecuencias relevantes para la idea del hombre y para el más amplio ámbito de las cuestiones filosóficas más.

La matemática del siglo XIX logró una gran cantidad de resultados técnicos pero, como ya hemos señalado, se caracteriza por una creciente exigencia de rigor. La primera fase de este proceso se debe a **Louis Auguste Cauchy** (1789- 1857), quien reduce los conceptos fundamentales del análisis infinitesimal (límite, derivada, integral, etc.) al estudio de los números reales. En la segunda fase, se lleva a cabo la “aritmétización del análisis”, es decir, la teoría de los números reales se reduce a la teoría de los números naturales. **Karl Weierstrass** (1815-1897) contribuye de modo muy notable a la aritmétización del análisis, la cual alcanza su punto culminante en 1872 con las dos fundamentaciones clásicas del sistema de los números reales, debidas respectivamente a **Georg Cantor** (1845-1918) y **Richard Dedekind** (1831-1916).

Los trabajos de estos últimos tres autores llevaron a la conclusión de que todas las construcciones basadas en los números reales proceden de manera rigurosa del concepto y propiedades de los números naturales, o sea, los enteros positivos. Por todo ello, algunos especialistas en la teoría de números, como **Leopold Kronecker** (1823-1881), consideraron que el número natural era la materia prima para establecer toda la matemática. En expresión de Kronecker, “en la matemática todo es obra humana a excepción de los números naturales, que fueron creados por el buen Dios”.

Pero no todos los matemáticos estaban de acuerdo con esta conclusión. De este desacuerdo surgen dos líneas de trabajo divergentes: una encabezada por **Gottlob Frege** y otra por Georg Cantor.

Frege (1848-1895), en sus *Fundamentos de la aritmética*, intentó relacionar la aritmética con la lógica, reduciendo el concepto de número natural a una combinación de conceptos lógicos. Nació así “la lógica de las clases”. Cantor redujo la aritmética a la teoría de conjuntos.

Entre tanto, el álgebra daba pasos de gigante gracias al genio francés **Évariste Galois** (1811-1832) (muerto prematuramente, quien sistematizó y organizó de modo brillante la teoría de ecuaciones algebraicas), al inglés **George Peacock** (1791-1858), al irlandés **William Hamilton** (1805-1865), al inglés **Arthur Cayley** (1821-1895) y al alemán **Hermann Grassmann** (1807-1877), quienes crearon el álgebra abstracta.

En 1847, **Boole** (1815-1864) escribió su libro *Análisis matemático de la lógica*¹, en el que lograba traducir a una teoría de ecuaciones la lógica tradicional de términos, y en particular la logística, esbozando una teoría algebraica de la lógica de proposiciones. Boole transformó así la lógica clásica en “lógica simbólica”, una rama de la matemática que, en el sentir de Frege, permitía un control riguroso de las demostraciones matemáticas.

En la misma época nacen las geometrías no euclídeas. Los axiomas no son ya verdades evidentes, sino que se reducen a puntos de partida elegidos convencionalmente, orientados a la construcción deductiva de la teoría, como reconocerá, entre otros, Henri Poincaré. Si son verdaderos los axiomas elegidos, lo serán también los teoremas que se deducen de ellos. Pero si, como ocurre en las geometrías no euclídeas, los axiomas son simples puntos de partida, simples “postulados”, nadie garantizará el sistema construido. En la geometría no euclídea la verdad reside en el principio de “no contradicción” dentro

¹ G. Boole, *Análisis matemático de la lógica* (Madrid 1995).

de la teoría. Este es el punto de partida del programa formalista de Hilbert que, como veremos, naufragó.

1.3. La reducción de la aritmética

Acabamos de ver los esfuerzos realizados en el siglo XIX por reducir a aritmética todo el análisis matemático. Dada la posibilidad de reducir la geometría a análisis, por medio de las operaciones que son objeto de la geometría analítica, la aritmética se configuraba como la base de todo el edificio matemático.

La reducción de toda la matemática a la aritmética fue la obsesión de **Peano** que, en 1899, propuso su axiomática de la aritmética elemental. Esta axiomática consta de tres términos primitivos, "número", "cero" y "sucesor inmediato de", y de cinco axiomas. Los axiomas pueden enunciarse así: i) el cero es un número; ii) el sucesor inmediato de un número es un número; iii) el cero no es el sucesor inmediato de ningún número; iv) dos números distintos cualesquiera poseen sucesores inmediatos distintos; v) toda propiedad que posea el cero y el sucesor inmediato de todo número que posea esa propiedad, está satisfecha por todos los números. Es fácil ver que este último axioma expresa el principio de inducción matemática. Como ya se ha señalado, esta axiomática no satisfizo a todos los matemáticos. Frege y Cantor buscaron reconducir la aritmética a bases aun más profundas. La teoría de conjuntos de Cantor abría la puerta a una matemática dotada de una generalidad y una potencia unificadora para la que, en el sentir de E. Casari, no se halla analogía en toda la historia del pensamiento humano.

Frege, y luego Russell, intentaron dar la noción de número en términos de "clases", pensando que la noción de clase era la más adecuada para la investigación de los fundamentos de la matemática. La idea es ésta: sean A y B dos clases, de suerte que a cada elemento de A se le pueda hacer corresponder un elemento de B, y viceversa; entonces se dirá que ambas clases tienen la misma potencia o el mismo número cardinal. Así, por la simple operación de establecer correspondencias biunívocas entre las dos clases, pode-

mos establecer si las dos clases tienen la misma cardinalidad, esto es, el mismo número de elementos, sin necesidad de contar. Parece, pues, legítimo definir el número cardinal de una clase A como la característica poseída en común por todas las clases, y sólo por ellas, cuyos elementos puedan ponerse en correspondencia biunívoca con los elementos de A.

En sus *Principios de la matemática* Russell escribe que matemáticamente un número no es más que una clase de clases equipotentes. Es esta definición la que permitió a Cantor establecer las relaciones entre conjuntos infinitos y conseguir toda una jerarquía de cardinalidad, descubriendo resultados de gran interés, pero opuestos a la intuición. Así, se establece que los números naturales tienen la misma potencia que los racionales.

En 1903, publica **Bertrand Russell** los *Principios de la matemática*, defendiendo la tesis de que “la matemática y la lógica son la misma cosa”. Tomando como base la obra de Frege y los trabajos de Peano, y en colaboración con **Alfred N. Withehead**, Bertrand Russell da a luz, entre 1910 y 1913, su magna obra titulada *Principia Mathematica*, en tres grandes volúmenes con el propósito de llevar a cabo el sueño de Frege, esto es, construir toda la matemática sobre bases lógicas. Con todo, ya entre 1901 y 1902 hizo Russell un descubrimiento que ponía esta labor en cuarentena. Nos estamos refiriendo a la *antinomía de Russell* que expone él del modo siguiente.

Sea un conjunto que no se contenga a sí mismo como elemento. Por ejemplo, si este conjunto es “los libros que están sobre la mesa”, el conjunto de estos libros no es un libro. A este tipo de conjuntos los llama “normales”. Si bien los conjuntos más comunes son normales, no puede excluirse que haya algún conjunto anormal. Así, el conjunto de todos los conjuntos es un conjunto, y por consiguiente no es normal. Formemos el conjunto C de todos los conjuntos normales y preguntemos si es normal. Supongamos que C se contenga a sí mismo como elemento. En este caso es normal, porque los elementos de C son conjuntos normales, y en cuanto conjunto nor-

mal no puede contenerse a sí mismo como elemento. Supongamos ahora que C no se contiene a sí mismo como elemento. Entonces, por definición, es normal, pero como todos los conjuntos normales, tiene que ser elemento de C y, por lo tanto, tiene que contenerse a sí mismo. Tanto en la primera como en la segunda hipótesis se incurre en una contradicción. Russell puso el siguiente ejemplo para evidenciar, de modo un tanto humorístico, su paradoja: definimos a un barbero de pueblo como aquél que afeita a todos aquellos que no se afeitan solos. Se ve en esta paradoja que una proposición legítima, según los fundamentos de la aritmética de Frege, era sin embargo autocontradictoria.

Ya antes, en 1897, había dado otra antinomia, la del "mayor número cardinal", el italiano Burali-Forti, que había sido hallada por el propio Cantor en 1895, y publicada en 1899, con esta enunciación:

Todas estas antinomias lógicas encuentran su reflejo en la famosa paradoja antigua del mentiroso: Epiménides, el cretense, dice que todos los cretenses son mentirosos. La explicación es clara:

Si es verdad lo que afirma Epiménides, que todos los cretenses mienten, entonces su afirmación es falsa. Pues al menos Epiménides, que era cretense, decía la verdad.

Y si es falso, entonces es verdad que todos los cretenses, incluso Epiménides, mienten.

Después del descubrimiento de estas antinomias cundió el escepticismo sobre la idea simple de conjunto y se planteó la cuestión de definir axiomáticamente y de modo riguroso la teoría de conjuntos. El primero en hacerlo fue **Zermelo** quien, habiendo descubierto independientemente de Russell la antinomia de las clases, desarrolló en 1908 una axiomática de la teoría de conjuntos. A esta siguió la de Skolem, la de Fraenkel, la de von Neumann, la de Bernays, etc.

Así y todo, a pesar de las axiomatizaciones, tanto la teoría de conjuntos como la de tipos, elaborada por Russell, dejaban planteados graves problemas.

1.4. La formalización de Hilbert

Hasta ahora, los matemáticos eran básicamente platónicos, es decir, creían en un mundo objetivo, donde los entes y relaciones matemáticas tienen una existencia propia que el investigador intenta descubrir, pero nunca inventar. A partir de **David Hilbert**, padre del formalismo matemático, un ente matemático existe cuando ha sido definido de modo no contradictorio, es decir, no tiene significado propio. La demostración de *no contradicción* se convierte, pues, en el problema central de la investigación matemática.

Un modo de probar la no contradicción había consistido en hallar un modelo de los axiomas de la teoría dentro de otra teoría ya existente, aceptada como coherente por consenso unánime. Es el camino seguido por Hilbert, en sus *Fundamentos de la geometría*, donde axiomatiza de modo riguroso la geometría de Euclides. Es también el camino que había seguido **Beltrami** cuando construyó modelos euclídeos de las geometrías no euclídeas. Este método no resolvía el problema; se limitaba a desplazarlo; es una vía practicable pero no resolutive. Nadie puede garantizar que la geometría euclídea, no interpretada con respecto a un universo de objetos físicos, esté exenta de contradicción.

En vista de esto y ante la aparición de las antinomias, la crisis ya admitida de la fuerza de la evidencia intuitiva, la distinta concepción de la naturaleza de los entes matemáticos, y el hecho de buscar la prueba de no contradicción en otra teoría que no garantizaba las expectativas concebidas, condujeron a Hilbert a la búsqueda de una prueba, no dependiente de otro sistema, sino directa y absoluta. A este objeto, Hilbert publica dos escritos, uno en 1922 y otro en 1923, en los que propone su famoso "programa hilbertiano", planteándose la demostración de la *coherencia de la aritmética*. Más adelante se extenderá la búsqueda de dicha coherencia al análisis matemático y a la teoría de conjuntos.

La axiomatización de la aritmética implicaba hacer explícitos los mecanismos lingüísticos y lógicos empleados en el desarrollo de

la teoría. De este modo se evitaba, entre otras cosas, la aparición de contradicciones que pudieran surgir del mismo aparato lógico en las demostraciones de los teoremas de la teoría. Esto implicaba, a su vez, formalizar la teoría cuya coherencia se quiere probar. Esta última formalización presupone una explicitación del lenguaje admitido, de las reglas de formación de las formas expresivas admisibles y del manejo de estas fórmulas admisibles. La no contradicción se identifica así con la imposibilidad de obtener, aplicando el manejo de reglas admitidas, una cadena demostrativa en la que aparezca una proposición y su negación, es decir, una contradicción. Esto quiere decir que la axiomatización completa de una teoría supone la formalización de la lógica que sirve para construirla. Este camino implica una *circularidad* que Hilbert asume. Emplea procedimientos, los llamados “métodos finitistas”, que se reducen a procedimientos elementales e intuitivos que permiten manejar una cantidad finita de objetos y funciones perfectamente determinables.

Las ideas de Hilbert fueron acogidas con aplauso por matemáticos ilustres de su tiempo, como Herbrandt, Ackermann, Bernays y el propio von Neumann. En la década de los años 20 se pensó que el programa de Hilbert podía transformarse en una realidad. En 1928 planteó el problema de la *completitud* de la teoría de los números, preguntándose si la axiomática de Peano era capaz de aprobar o refutar todas las proposiciones de dicha teoría.

1.5. Los teoremas de Gödel

Así estaban las cosas cuando en 1931, **Kurt Gödel** publica el artículo “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme” (*Sobre las proposiciones formalmente irresolubles de los Principia Mathematica y los sistemas relacionados*). En este artículo, demostraba que en todo sistema axiomático que sea capaz de producir los teoremas de la aritmética elemental, hay proposiciones aritméticas que no pueden probarse o refutarse mediante deducciones formales basadas en los axiomas del sistema. Este teorema aparece como *Proposición VI* del artículo y dice sintéticamente:

Toda formulación axiomática de la teoría de los números incluye proposiciones indecidibles.

Aclaremos que se llama “proposiciones indecidibles” a aquellos enunciados matemáticos que no pueden ser probados ni refutados dentro del sistema axiomático.

Este teorema se conoce como *teorema de la incompletitud de Gödel* y afirma que no se puede construir una teoría axiomática de los números que posea la completitud propuesta por Hilbert.

El segundo teorema de la incompletitud de Gödel demuestra que la aritmética básica no se puede usar para demostrar su propia consistencia, y por lo tanto tampoco puede demostrar la consistencia de nada más fuerte.

Este resultado expresaba con toda claridad el fracaso del programa hilbertiano, ya que los métodos finitistas utilizados por Hilbert para demostrar la no contradicción de la aritmética también son formalizables en el interior del sistema axiomático de la aritmética.

1.6. La semántica de Tarski

Después de los resultados conseguidos por Gödel, la semántica lógica adquirió una importancia cada vez más central. La razón es que se puede demostrar que si un cálculo admite un modelo, ese cálculo posee la coherencia. Se obtiene así una prueba de coherencia de tipo semántico.

Contribuyó en gran manera a aquilatar estas ideas el ensayo publicado en 1933, con el título *El concepto de verdad en los lenguajes formalizados*, por **Alfred Tarski**. En él se define con precisión el concepto de verdad y el de consecuencia lógica.

La *verdad*, para Tarski, es la conformidad de lo que se asevera con los hechos, una relación semántica entre un mundo y un lenguaje que habla de él. La afirmación “la nieve es blanca”, es verdadera si, y sólo si la nieve es de hecho blanca. Tarski afirma, entre otras cosas, que, si tenemos una definición de verdad consistente, en el acuerdo

entre aserciones y hechos, no tenemos un criterio de verdad: siempre podemos equivocarnos al afirmar que una teoría es verdadera.

En cuanto a la *consecuencia lógica*, se trata de una noción semántica y no sintáctica. De este modo, Tarski investiga las relaciones que pueden establecerse entre lenguajes formalizados y conjuntos de objetos sobre los que dichos lenguajes pueden ser interpretados, de tal suerte que den lugar a la formulación de proposiciones verdaderas acerca de esos objetos.

Tanto los trabajos de Tarski como la de otros lógicos, entre los que hemos de mencionar a **Igor Novikov**, autor de una conjetura de consistencia que lleva su nombre, contribuyeron al desarrollo más inesperado, paralelamente a la propia matemática, de la lógica matemática, que constituye hoy en día uno de los puntos de partida de las matemáticas aplicadas. Esta disciplina ha tomado prestados, según idea fundamental de Hilbert, los propios útiles de la matemática, para de esta forma poder estudiar mejor su mecanismo. Actualmente no cesa de atraer a numerosos investigadores, gracias a los cuales ha podido responder (negativamente la mayoría de las veces) a un buen número de cuestiones sobre la posibilidad de resolver problemas matemáticos según unos métodos dados, cuyas dificultad parecía desafiar al análisis.

1.7. El intuicionismo de Brouwer

Un ejemplo de lo que acabamos decir lo constituye el *intuicionismo*. Así como para los platónicos, como Frege, los entes matemáticos tienen una existencia propia que hay que descubrir; así como para los formalistas, como Hilbert, un ente sólo puede considerarse existente cuando es definido sin contradicciones; así también para los llamados *intuicionistas* un ente sólo existe matemáticamente cuando se logra construirlo, esto es, cuando se pueda dar un ejemplo de él o se indique el procedimiento que permita llegar a un ejemplo similar, a través de un número finito de pasos. Esta concepción del intuicionismo prohíbe apelar al “infinito actual”.

Estas ideas fueron expuestas por el holandés **Jan L. Brouwer** (1881-1969) y sus seguidores, entre los cuales está **Arend Heyting** (1898-1980). Para los intuicionistas, las matemáticas existen antes que la lógica. Los seres humanos nacen con una "intuición original" de una sucesión ilimitada de objetos por adiciones sucesivas de un objeto cada vez. El origen de la matemática es una intuición que nos representa los conceptos matemáticos de una manera inmediatamente clara: la facultad de tratar por separado ciertos conceptos y consecuencias que se presentan normalmente en la manera corriente de razonar.

Los objetos a los que se refiere la matemática intuicionista son independientes de la experiencia, y no tienen existencia separados del pensamiento. Así, tomando el "uno" como punto de partida mediante la operación de "añadir uno", el intuicionista, por repetición reiterada, llega a la intuición de la serie limitada de los números naturales. Pero, procediendo así, no puede apelar al "infinito actual", lo más a un "infinito potencial".

Todo objeto matemático es considerado producto de la mente humana, y, por ende, la existencia de un objeto es equivalente a la posibilidad de su construcción. Esto contrasta con el enfoque que formula que la existencia de un objeto puede ser demostrada. Para los intuicionistas esto no es válido; la comprobación de la existencia de un objeto matemático no significa que sea posible hallar una prueba constructiva de su existencia.

Esto significa que un enunciado matemático no tiene el mismo significado para un intuicionista que para un matemático clásico. Estas ideas requieren la reconstrucción de los fundamentos de la teoría de conjuntos y el "cálculo", respectivamente.

Si se aceptan las reglas del intuicionismo, construyendo uno por uno los entes matemáticos, se evitan los peligros de las antinomias. En los comienzos, en los años 20, la teoría intuicionista encontró dificultades por no ser bien entendida; se pensó que echaba por tierra toda la matemática clásica. Hoy, las cosas están cambiando; se ve

en el intuicionismo una teoría fecunda, y de las más interesantes de la matemática actual.

1.8. Otras aportaciones a la matemática durante el siglo XX

Un primer punto a señalar es la escisión, mucho más pronunciada en el siglo XX que en épocas anteriores, entre matemáticas puras y matemáticas aplicadas. Los problemas de matemáticas puras son tan numerosos y tan diversos, y requieren tantos conocimientos previos para poder abordarlos, que absorben la total actividad de quienes los estudian. Asimismo, los matemáticos que afrontan de lleno los problemas puros y aplicaciones constituyen una excepción, y J. von Neumann es uno de los pocos. Sin duda, la física continúa planteando a los matemáticos un buen número de problemas difíciles e interesantes; pero incluso en dominios como las ecuaciones en derivadas parciales, estos problemas no son ya hoy los más importantes. Aquí, como en todas partes, ha cedido el paso a las cuestiones vinculadas íntimamente con el desarrollo intrínseco de las ideas matemáticas, la búsqueda de las estructuras esenciales que rigen los fenómenos.

Asimismo se cuenta hoy en día, aparte de con los matemáticos puros (que se alejan poco a poco de lo "real"), con toda una serie de ciencias *paramatemáticas*, en las que los investigadores se dedican a traducir, en resultados aplicables a la práctica, las especulaciones abstractas de los matemáticos teóricos; estas aplicaciones se han multiplicado sobre todo desde que las máquinas electrónicas han permitido considerar la posibilidad de cálculos numéricos que por su longitud eran, en otros tiempos, inabordables. Se ha dado también el caso, en cierto modo, contrario, en que partiendo de modelos prácticos se ha llegado a una gran abstracción. Así, la aplicación cada vez más activa de los modelos estadísticos en numerosos campos llevó, a partir de 1910, aproximadamente, a considerar la estadística como una especialización íntimamente vinculada al cálculo de probabilidades (el cual, a su vez, adquirió a partir de 1930, un carácter mucho más teórico y abstracto).

En el interior mismo de las matemáticas puras, asistimos al eterno combate entre las tendencias a la *especialización* y a la *concentración*. Teniendo en cuenta el enorme aumento del número de investigadores, resultados y métodos de ataque, parecería que la primera de estas tendencias debe vencer, por la imposibilidad física de dominar un campo tan vasto; el destino de las matemáticas consistiría en fragmentarse en una serie de disciplinas autónomas que se ignoran, más o menos, entre sí.

Los grandes matemáticos hasta comienzos del siglo XX siempre pudieron vencer esta tentación a la especialización; y en ellos vemos cómo sus ideas se mueven con provecho, sin cesar, de una parte de las matemáticas a la otra. Pero estaba reservado al siglo XX el ver como nacen esfuerzos sistemáticos de concentración que tienden a reagrupar las matemáticas alrededor de unos pocos principios generales que permiten dominar los más variados aspectos.

A la escuela alemana, y sobre todo a Hilbert, se deben, como hemos visto ya, los primeros pasos de esta vía. A partir del año 1910, este movimiento, con Steinitz y Hausdorff, en Alemania, y posteriormente las escuelas alemana y polaca de la posguerra, adquiriría una fuerza siempre creciente y dominaría poco a poco el pensamiento matemático moderno. Sus líneas se concretan en numerosas obras, la más ambiciosa de las cuales está formada por los *Éléments de Mathématique*, de **N. Bourbaki**, redactados después de 1935 por un equipo de matemáticos, la mayoría franceses, y pertenecientes a la generación que había intentado devolver a la escuela francesa su vocación tradicional de universalidad perdida. Este tratado reconsidera las matemáticas desde su principio, sin suponer ningún conocimiento previo; agrupa las distintas partes de las matemáticas no ya siguiendo las divisiones tradicionales, basadas en su forma superficial, sino según sus afinidades profundas, evidenciadas mediante el esclarecimiento de su estructura axiomática.

Prescindiendo de los estudios sobre los fundamentos de la matemática, de los que nos hemos ocupado ya en los párrafos anteriores,

vamos a dar a continuación un esquema cronológico (a sabiendas de ser repetitivos) de la labor desarrollada con carácter más general, siguiendo un estudio del catedrático y académico de la *Real Academia de Ciencias*, D. Manuel López Pellicer.

En 1902, Russell publicó su famosa paradoja y Lebesgue su *Teoría de la Medida e Integral*. La paradoja originó el sistema axiomático de la *Teoría de Conjuntos* de Zermelo-Fraenkel (1908-1921). Luego vinieron las *Estructuras* (Bourbaki, 1930) y la *Teoría de las Categorías* (Eilenberg, 1950).

El método de Lebesgue proporcionó medida a “muchos” subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, pero Vitali encontró subconjuntos no medibles por Lebesgue, para los que Hausdorff, Banach y Tarski encontraron comportamientos paradójicos, explicados por von Neumann en 1930 con la teoría de los grupos amenables.

En 1910, Steinitz obtuvo la clasificación de los cuerpos, Brouwer su famoso teorema del *punto fijo* y Bieberbach probó la finitud del número de grupos de simetría n -dimensionales, resultado complementado en 1974 por Penrose con recubrimientos carentes de simetría, encontrados unos diez años después en los cuasicristales.

En 1915, Einstein publicó su *Teoría General de la Relatividad* y Hilbert dedujo las ecuaciones de Einstein y de Maxwell de un único principio variacional, para unificar los campos gravitacional y electromagnético.

De la década de los 20 son los *espacios de Banach*, el teorema del *minimax* de von Neumann, origen del estudio del equilibrio económico, y los *números trascendentes* de Gelfond.

Gödel puso límite a la capacidad de elaborar sistemas axiomáticos con su *teorema de incompletitud* (1931) y Turing probó que el razonamiento humano es mucho más que un algoritmo (1936). En esta década de los 30 se axiomatizó la Mecánica Cuántica (von Neumann) y la Teoría de la Probabilidad (Kolmogorov). Gödel probó que el universo de los conjuntos constructibles cumple los axiomas

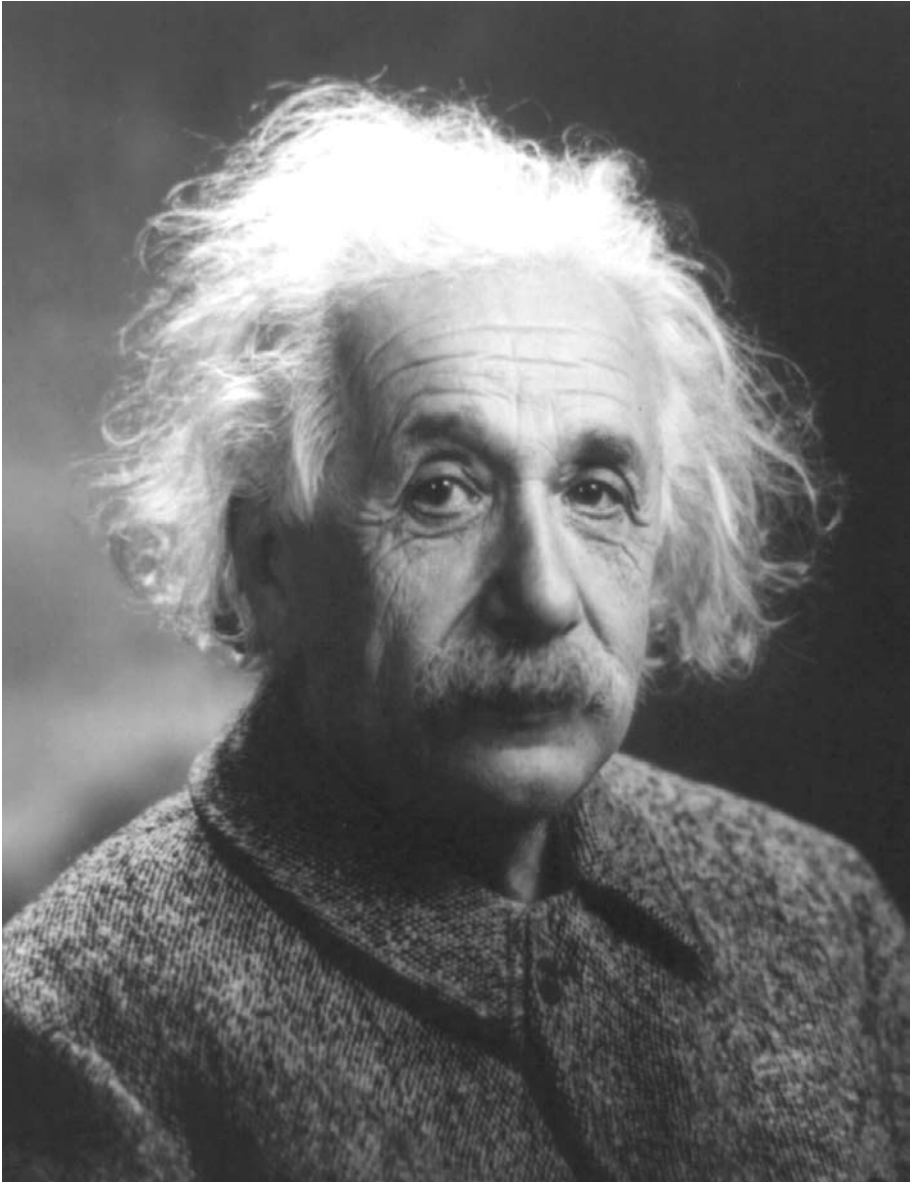
de Zermelo-Fraenkel y la hipótesis del continuo. Posteriormente, en 1963, Cohen añadió a los conjuntos constructibles otros conjuntos genéricos, obteniendo universos que cumplían los axiomas de Zermelo-Fraenkel y la negación de la hipótesis del continuo.

Durante la segunda guerra mundial se construyeron algunos de los primeros ordenadores y se desarrollaron técnicas de optimización. Después del conflicto, los ordenadores llegaron al mundo científico, Schwartz publicó su teoría de distribuciones (1945), la inteligencia artificial nació con el análisis de Shanon sobre el ajedrez (1950) y se enriqueció la teoría de optimización con las aportaciones de Dantzig, Kuhn y Tucker.

El año 1951, con método matemático, Arrow probó la no existencia de un *sistema electoral* perfecto y von Neumann formuló la auto reproducción de una máquina, modelo encontrado por Crick y Watson en 1953 en la reproducción celular.

La segunda mitad del siglo XX, además de grandes resultados, como la *Teoría de los Sistemas Dinámicos* de Kolmogorov, Arnold y Moser (1954-1962), la *Teoría del Caos* (1963), las *Catástrofes* (1964), la *Teoría de Nudos* de Jones (1984), los recientes resultados de Bourgain y Gowers en Análisis Funcional o la prueba de Wiles del último teorema de Fermat (1995), ha resuelto grandes problemas con grandes grupos de investigación apoyados por ordenador, como la clasificación de Gorestein de los Grupos Finitos (1972), la resolución del problema de los cuatro colores (Appel y Haken, 1976), la construcción del *fractal* de Mandelbrot (1980), la refutación de la hipótesis de Mertens (Riele y Odizko, 1983) o la solución de Hale al problema de Kepler (1998).

Muchos problemas quedan abiertos para el siglo XXI. Tres muy famosos son la hipótesis de Riemann y las conjeturas de Goldbach y Poincaré. No es posible predecir si el siglo XXI traerá su solución, pero es casi seguro que el siglo XXI nos dará aportaciones tan sorprendentes e inesperadas como las del siglo XX, que ahora no podemos imaginar.



La teoría de la relatividad de Albert Einstein exigió una Matemática especial para expresar la nueva concepción del espacio y del tiempo.

2. Las matemáticas en la física

2.1. Introducción

La física del siglo XX ha seguido dos líneas fundamentales en su desarrollo. La primera línea aparece a finales del XIX, y es causada por el estudio de los fenómenos de interacción entre la materia y las radiaciones, lo que conduciría posteriormente a la *teoría cuántica*. La segunda se inició en las primeras décadas del siglo y se originó en la gran crisis de la mecánica, en su confrontación con el electromagnetismo, y en torno a la *teoría de la relatividad* de Einstein. Tanto una como otra teoría admiten que la física clásica es una buena aproximación a la nueva física, siempre que los valores de las magnitudes físicas estén dentro de los límites de la experiencia cotidiana. Cada uno de ambos programas se refiere a planes de observación muy distintos, aunque a veces puedan converger, como ocurre con la *mecánica cuántica relativista*.

En la teoría cuántica es preciso encararse con los fenómenos microscópicos, mientras que la de la relatividad se aplica a velocidades y longitudes muy grandes, a veces a escala astronómica. En consecuencia, los dos programas reciben tratamientos distintos y, aunque se intenta, no parece próxima la unificación de ambos. Paralelamente a la teoría de los "cuantos" se ha desarrollado el estudio del *núcleo del átomo* y sus partes; estudio difícil de describir en términos elementales, pero del que daremos alguna noticia.

Las transformaciones inducidas por la física en este siglo fueron absolutamente revolucionarias, desde todos los puntos de vista: fi-

losófico, científico, industrial, social, etc. La *revolución científica moderna* (segunda revolución científica) comenzó en el año 1905, con la relatividad especial, la cual acabó con la noción de tiempo absoluto. En 1917, la relatividad general puso fin al concepto del espacio-tiempo. En 1925 llegó la mecánica cuántica y, con ella, un gran impacto en la filosofía, ya que la física determinista, que afectó a todas las otras ciencias, había sido la base de la filosofía positivista. La mecánica cuántica también planteó en otros términos la cuestión de nuestro conocimiento de la realidad objetiva, independiente del observador. Tal supuesta realidad objetiva escapa a nuestra observación directa, debido a que lo que vemos y medimos es, siempre, la realidad objetiva más la influencia de nuestro aparato de observación. Esta fue una contribución fundamental a la teoría del conocimiento.

2.2. Las teorías de la relatividad de Einstein

Existen dos teorías de la relatividad, debidas ambas a Einstein: la *teoría especial o restringida* y la *teoría general*. La idea esencial de ambas es que dos observadores que se mueven relativamente, uno al lado de otro, con gran velocidad, cercana a la de la luz, medirán a menudo diferentes intervalos de *tiempo* y *espacio* para describir las mismas series de eventos. Es decir, la percepción del espacio y el tiempo depende del estado de movimiento del observador. Sin embargo, a pesar de esta relatividad del espacio y el tiempo, existe una forma más sutil de invariancia física, ya que el contenido de las leyes físicas será el mismo para ambos observadores. Esto último significa, que a pesar de que los observadores difieran en el resultado de medidas concretas de magnitudes espaciales y temporales, encontrarán que las ecuaciones que relacionan las magnitudes físicas tienen la misma forma con independencia de su estado de movimiento.

Esto es posible debido a la aceptación de la teoría de los *cuantos*, ya que, como veremos, al aceptar que los componentes fundamentales de la materia son espacio-temporales, estamos obligados a aceptar que si una de las dimensiones ligada a ellos se alarga, la otra necesariamente debe de acortarse (principio de Heisenberg).

2.2.1. Teoría de la relatividad restringida

A finales del siglo XIX los físicos pensaban que la “mecánica clásica” de Isaac Newton, basada en la llamada “invariancia galileana” (origen de las ecuaciones matemáticas conocidas como “transformaciones de Galileo”), describía los conceptos de velocidad y fuerza para todos los observadores (esto es, para todos los “sistemas de referencia”) de igual modo. Sin embargo, **Hendrik Lorentz** y otros habían comprobado que las ecuaciones de Maxwell, que gobiernan el electromagnetismo, no se comportaban según las leyes de Newton cuando el *sistema* de referencia varía (por ejemplo, cuando se considera el mismo problema físico desde el punto de vista de dos observadores que se mueven, uno respecto del otro). **Maxwell** defendía que las ondas luminosas debían viajar a velocidad constante. Según la teoría de la relatividad de Newton, los fenómenos físicos deben respetar las mismas leyes si se observan desde sistemas de referencia que se mueven, uno en relación a otro, con un movimiento rectilíneo y uniforme.

En 1887, **Albert Michelson** y **Edward Morly** llevaron a cabo un cuidadoso experimento consistente en comparar la velocidad de la luz en la dirección de la tierra con la velocidad de la luz en la perpendicular a dicho movimiento. Ambas velocidades resultaron exactamente iguales. El experimento de Michelson-Morley sirvió para confirmar que la velocidad de la luz permanecía constante, independientemente del sistema de referencia en el cual se medía, contrariamente a lo esperado al aplicar las transformaciones de Galileo. A finales del siglo XIX se llevaron a cabo varios intentos para conciliar la oposición entre las teorías de Maxwell y las de Newton. Así, **Poincaré**, sirviéndose de las leyes de Lorentz y el principio de relatividad clásica de Newton, intentó esta conciliación, conservando la existencia del éter como realidad física. Hubo entre 1887 y 1905 varios intentos para explicar el resultado obtenido por Michelson y Morley. El principal corrió a cargo del físico holandés Hendrik Lorentz, que hablaba de “contracción de objetos” o de “retardos de relojes”, cuando estos se mueven a través del éter.

En 1905 un desconocido físico, **Albert Einstein**, publicó un artículo que cambió radicalmente la percepción que se tenía en ese momento del espacio y el tiempo. En su *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (*Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*)¹, Albert Einstein revolucionó el mundo al postular lo que ahora conocemos como *Teoría de la Relatividad Especial* o *Restringida*. Esta teoría se basa en el *principio de relatividad* y en la *constancia de la velocidad de la luz* en cualquier sistema de referencia inercial. De estas aserciones dedujo Einstein las “transformaciones de Lorentz”. También reescribió las relaciones de la “cantidad de movimiento” y de la “energía cinética”, para que éstas se mantuvieran también invariantes. El núcleo de la teoría está constituido por los enunciados siguientes:

Tanto los fenómenos de la termodinámica como los de la mecánica no poseen propiedades correspondientes a la noción de reposo absoluto. Indican más bien que [...] las mismas leyes de la electrodinámica y la óptica resultan válidas para todos los sistemas de referencia en los que se aplican las ecuaciones de la mecánica. Elevaremos esta conjetura [...] a postulado que sólo aparentemente no es conciliable con el primero: la luz siempre se propaga en el espacio vacío a una velocidad determinada, que es independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor.

El primero de estos enunciados elimina la presencia del éter y, además, es incompatible con el segundo si se quieren mantener las transformaciones de Galileo. A partir de estos postulados, Einstein deduce, de manera independiente, las transformaciones de Lorentz, que sustituyen a las de Galileo. Todo esto lleva consigo reformular los tradicionales conceptos de espacio y tiempo, y demostrar teoremas que se oponen a la experiencia común. Por ejemplo, éstos: dos fenómenos simultáneos con respecto a un observador pueden no serlo con respecto a un tercero, y recíprocamente; la masa de un cuerpo aumenta con su velocidad. Y sobre todo, la famosa ley $E = mc^2$ (donde E es la energía, m es la masa y c la velocidad de la luz), que

¹ A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, *Annalen der Physik*, 1905.

permitió establecer la equivalencia entre masa y energía y una nueva definición del espacio-tiempo. De ella se derivaron predicciones y surgieron curiosidades. Así, un observador atribuye a un cuerpo en movimiento una longitud más corta que la que tiene en reposo, y la duración de los eventos que afecten al cuerpo en movimiento son más largos, con respecto al mismo evento medido por un observador en el "sistema de referencia" de un cuerpo en reposo.

2.2.2. Relatividad general

La relatividad restringida se afianzó rápidamente, superando todo tipo de obstáculos. Once años más tarde, Einstein propuso una nueva teoría que supera a la anterior generalizándola. Elimina la limitación, impuesta en la relatividad restringida, a movimientos uniformes rectilíneos, y sostiene que las leyes de la física son las mismas cualquiera que sea el sistema de referencia desde el que se las observe (aunque este sea acelerado), siempre que se tengan en cuenta también los efectos del eventual campo gravitacional. Einstein llega a estos resultados constatando que la masa de un cuerpo es la misma cuando la medimos con la ley de la gravitación universal que con la segunda ley de la termodinámica (masa inercial igual a masa gravitacional): resulta así que es posible referir cualquier efecto acelerador a los correspondientes campos gravitacionales que modifican la estructura geométrica del espacio. En suma, todo problema físico ha de resolverse mediante el estudio de las propiedades geométricas del espacio.

La teoría general contiene, como caso límite, a la teoría restringida. Conserva todos los resultados de la anterior y añade otros que exigen posteriores controles experimentales, cada vez más sofisticados.

2.3. La teoría de los cuantos

La teoría de los cuantos tuvo su origen, como ya hemos señalado, en el estudio de los fenómenos de interacción entre la materia y las radiaciones. La palabra "cuanto" es debida a **Planck** (1858-1947), que la introdujo cuando intentaba resolver un problema de emisión

electromagnética, el problema del *cuerpo negro*. Se entiende por cuerpo negro aquél que transforma en calor toda la energía radiante que incide sobre él. El físico austriaco **Josef Stefan** había descubierto en 1879 que la función que expresa la cantidad de energía absorbida por un cuerpo negro, al variar la temperatura, era incompatible con las leyes de la termodinámica y, en consecuencia, con la mecánica clásica. Planck, en 1900, supuso que la energía no se emite ni se absorbe, en forma de radiación de la materia, de modo continuo, sino sólo según múltiplos enteros de determinada cantidad, iguales al producto de la frecuencia ν de la radiación por una constante h , la "constante de Planck". A la constante h se le llama "cuanto de acción" y al producto $h\nu$, "cuanto de energía".

Lo interesante de este descubrimiento es que, análogamente a lo que hizo Einstein, Planck se negó a acatar las teorías existentes ante evidencias experimentales contrarias. Fue precisamente Einstein quien obtuvo la primera constancia del hallazgo de Planck. Einstein supone que toda radiación sigue la hipótesis de los cuantos. Llama "fotón" a la partícula correspondiente a una radiación de frecuencia ν y "cantidad de movimiento" a $h\nu/c$ donde c es la velocidad de la luz. De este modo integra el efecto fotoeléctrico en el seno de la teoría, lo cual le sirve para confirmarla. En 1923, **Arthur Compton** llevó a cabo con éxito, una operación análoga con respecto a la difusión de los rayos X, el "efecto Compton".

Planck adujo que la radiación se componía de pequeñas unidades o paquetes, del mismo modo que la materia estaba constituida por átomos. Denominó "cuanto" o *quantum* (palabra latina que significa "cuánto") a la unidad de radiación. Planck alegó que la radiación absorbida sólo podía ser un número entero de cuantos y que la cantidad de energía en un cuanto dependía de la longitud de onda de la radiación. Cuanto menor fuera esa longitud, tanto mayor sería la fuerza energética del cuanto; o, para decirlo de otra forma, la energía contenida en el cuanto es inversamente proporcional a la longitud de onda.

Desde aquel momento se pudo relacionar directamente el cuanto con la frecuencia de una determinada radiación. Como ocurre con la energía contenida en el cuanto, la frecuencia era inversamente proporcional a la longitud de onda de la radiación. Si ambas (la frecuencia y la energía contenida en el cuanto) eran inversamente proporcionales a la longitud de onda, los dos deberían ser directamente proporcionales entre sí. Planck lo expresó con su hoy famosa ecuación:

$$e = h\nu.$$

El símbolo e representa la energía del cuanto, ν la frecuencia, y h , la "constante de Planck".

El valor de h es extremadamente pequeño, lo mismo que el del cuanto. En realidad, las unidades de radiación son tan ínfimas, que la luz nos parece continua, lo mismo que la materia, que también nos parece continua. Pero, hacia principios del siglo XX, la radiación corrió la misma suerte que le había correspondido antes a la materia: hoy día se las reconoce a ambas como discontinuas.

Los cuantos de Planck esclarecieron la conexión entre temperatura y longitudes de onda de radiaciones emitidas. Un cuanto de luz violeta era dos veces más enérgico que un cuanto de luz roja y, naturalmente, se requería más energía calorífica para producir cuantos violetas que cuantos rojos. Las ecuaciones sustentadas por el cuanto, esclarecieron limpiamente la radiación de un cuerpo negro en ambos extremos del espectro.

A su debido tiempo, los cuantos de Planck prestarían aún un mayor servicio: explicarían el comportamiento de los átomos, de los electrones en los átomos y de los nucleones en los núcleos atómicos. Planck fue galardonado con el premio Nobel de Física en 1918.

En 1924 **Werner Heisenberg**, y en 1926 **Erwin Schrödinger** y **Paul Dirac**, construyeron la mecánica cuántica, en la cual explican las teorías cuánticas precedentes. En la mecánica cuántica, los resultados de las medidas físicas son probabilidades; la teoría cuántica describe el cálculo de esas probabilidades. Trata ésta de la interpre-

tación más aceptada, la llamada "interpretación de Copenhague", por ser promovida desde esta ciudad por **Niels Bohr**, y en la que participaron Heisenberg, Born, Dirac, Pauli, y muchos otros de los más prestigiosos físicos de la época. También hubo interpretaciones contrarias, como la llamada de las "variables ocultas", sustentada, entre otros, por Schrödinger, Einstein y **David Bohm**.

La mecánica cuántica suministró herramientas teóricas para la *física de la materia condensada*, la cual estudia el comportamiento de los sólidos y los líquidos, incluyendo fenómenos tales como estructura cristalina, semiconductor o superconductor. Entre los pioneros de la física de la materia condensada se incluye **Félix Bloch**, el cual desarrolló una descripción mecano-cuántica del comportamiento de los electrones en las estructuras cristalinas en 1928.

La *teoría cuántica de campos* se formuló para extender la mecánica cuántica de manera consistente con la teoría especial de la relatividad. Alcanzó su forma moderna a finales de los años 1940, gracias al trabajo de **Richard Feynman**, **Julián Schwinger**, **Tomonaga** y **Freeman Dyson**. Ellos construyeron una nueva teoría de la termodinámica, en la cual se describe la interacción electromagnética.

La teoría cuántica de campos suministró las bases para el desarrollo de la *física de partículas*, la cual estudia las fuerzas fundamentales y las partículas elementales. En 1954, **Yang Chen Ning** y **Robert Mills** desarrollaron las bases del "modelo estándar". Este modelo se completó en los años 1970 y con él se describen casi todas las partículas elementales observadas.

2.4. Física atómica y nuclear

Una vez descubierto el electrón y la estructura del núcleo del átomo, la atención de los físicos se centró en este último. Hagamos un breve recorrido por el camino seguido en esta investigación.

La radioactividad fue descubierta en las sales de uranio por el físico francés **Henri Becquerel** en 1896. En 1898, los científicos franceses **Marie Curie** y **Pierre Curie** descubrieron dos elementos de radiactivos existentes en la naturaleza, el polonio y el radio.

En 1913, **Niels Bohr** publica su modelo del átomo, consistente en un *núcleo central*, compuesto por partículas que concentran la práctica mayoría de la masa del átomo (neutrones y protones), rodeado por varias capas de partículas cargadas casi sin masa, los *electrones*. Mientras que el tamaño del átomo resulta ser del orden de 10^{-8}cm (un Angström), el núcleo puede medirse en 10^{-12}cm (0,0001 Angström), o sea, que el núcleo es 10.000 veces menor que el átomo.

Ernest Rutherford, en el año 1918, definió la existencia del núcleo de hidrógeno. Rutherford sugirió que el núcleo de hidrógeno, cuyo número atómico se sabía que era 1, debía ser una partícula fundamental. Se adoptó para esta nueva partícula el nombre de “protón”, sugerido por Goldstein en 1886 para definir ciertas partículas que aparecían en los “tubos catódicos”.

Durante la década de 1930, Marie Curie y Jean Frédéric Joliot-Curie obtuvieron los primeros nucleidos radiactivos artificiales bombardeando boro y aluminio con partículas alfa, para formar isótopos radiactivos de nitrógeno y fósforo. Algunos isótopos de estos elementos presentes en la naturaleza son estables. Los isótopos inestables se encuentran en proporciones muy bajas.

En 1932, **James Chadwick** realizó una serie de experimentos con una *radiactividad especial* que definió en términos de corpúsculos o partículas, que formaban esa radiación. Esta nueva radiación no tenía carga eléctrica y poseía una masa casi idéntica a la del protón. Inicialmente se postuló que fuera resultado de la unión de un protón y un electrón, formando una especie de dipolo eléctrico. Posteriores experimentos descartaron esta idea llegando a la conclusión de que era una nueva partícula procedente del núcleo a la que se llamó “neutrón”.

Los científicos alemanes **Otto Han** y **Fritz Strassmann** descubrieron en 1938, la “fisión nuclear”: un átomo de uranio bombardeado por protones puede romperse en dos partes y liberar algunos neutrones, junto con una enorme cantidad de energía. Los neutrones liberados en determinadas condiciones pueden dividir otros núcleos de uranio en una sucesión continuada: es la “reacción en cadena”, aparecida en 1939, debida a **H. von Halman** y **J.B. Perrin**.

Estos descubrimientos llevaron a **Fermi**, en 1942, a la construcción de la pila atómica y a otros, a la bomba atómica.

Las investigaciones han continuado. Las dimensiones asociadas con los núcleos atómicos son de orden de 10^{-12}cm (diez mil veces menores que las de los átomos): las energías asociadas son diez mil veces mayores, ya que la energía crece con el inverso de la distancia. El hombre exploró esas distancias y aprendió que los núcleos tienen protones y neutrones. Estudió la dinámica de los núcleos y vio que podía obtener energía en forma explosiva (como en las bombas) o controlada (como en las centrales nucleares). Cada una de estas últimas tiene un poder destructor igual a treinta veces el de todas las arrojadas durante la segunda guerra mundial.

Volvamos ahora a las distancias subatómicas. Es claro que la curiosidad del hombre tampoco se detuvo en los 10^{-12}cm . Hoy sabemos que los protones y neutrones están formados por tres "quarks" cada uno. Un protón consta de dos quarks U (up) y uno D (down), mientras que un neutrón está constituido por la configuración DDU. Las dimensiones de un quark son del orden de 10^{-16}cm . En la actualidad pensamos que los constituyentes elementales de la materia son los quarks, los cuales, paradójicamente, no pueden ser observados libres sin romper la consistencia de la teoría. Estos aparecen siempre combinados de dos en dos o de tres en tres, y dan así origen a protones, neutrones, mesones y a todas las partículas hadrónicas (aquellas que sufren interacciones nucleares fuertes) observadas hasta ahora. Pero este avance permanente hacia distancias cada vez más pequeñas tropieza con ingentes problemas de todo tipo. Cada progreso importante, cada salto, ha implicado energías del orden de 10.000 veces mayores. El principal acelerador actualmente en uso, el LEP, produce protones de 1TeV (un millón de millones de electrovoltios de energía (1eV es la energía ganada por un electrón cuando es acelerado en un campo eléctrico de un voltio)).

El CERN tiene previsto inaugurar durante el año 2008 un nuevo acelerador, el LHC. El LHC estará constituido, predominantemente,

por imanes dipolares superconductores, que son los componentes más complejos de la máquina. Su bobina superconductora les permitirá conducir corrientes sumamente altas sin pérdidas de energía, capaces de producir campos magnéticos muy altos para curvar la trayectoria de los protones que son acelerados a velocidades cercanas a la de la luz. El LHC será así el acelerador más poderoso del mundo. Las colisiones entre los protones alcanzarán energías de 14 teraelectronvoltios (TeV), 70 veces más altas que las del acelerador de colisiones LEP anterior, para el que se construyó originalmente el túnel de 27 Km. Para alcanzar el estado superconductor, los imanes tienen que enfriarse a una temperatura de -271 grados C, cerca del cero absoluto. Si el LHC se hubiese hecho de imanes convencionales, habría necesitado tener 120 km de largo para alcanzar las mismas energías y su consumo de electricidad habría sido fenomenal.

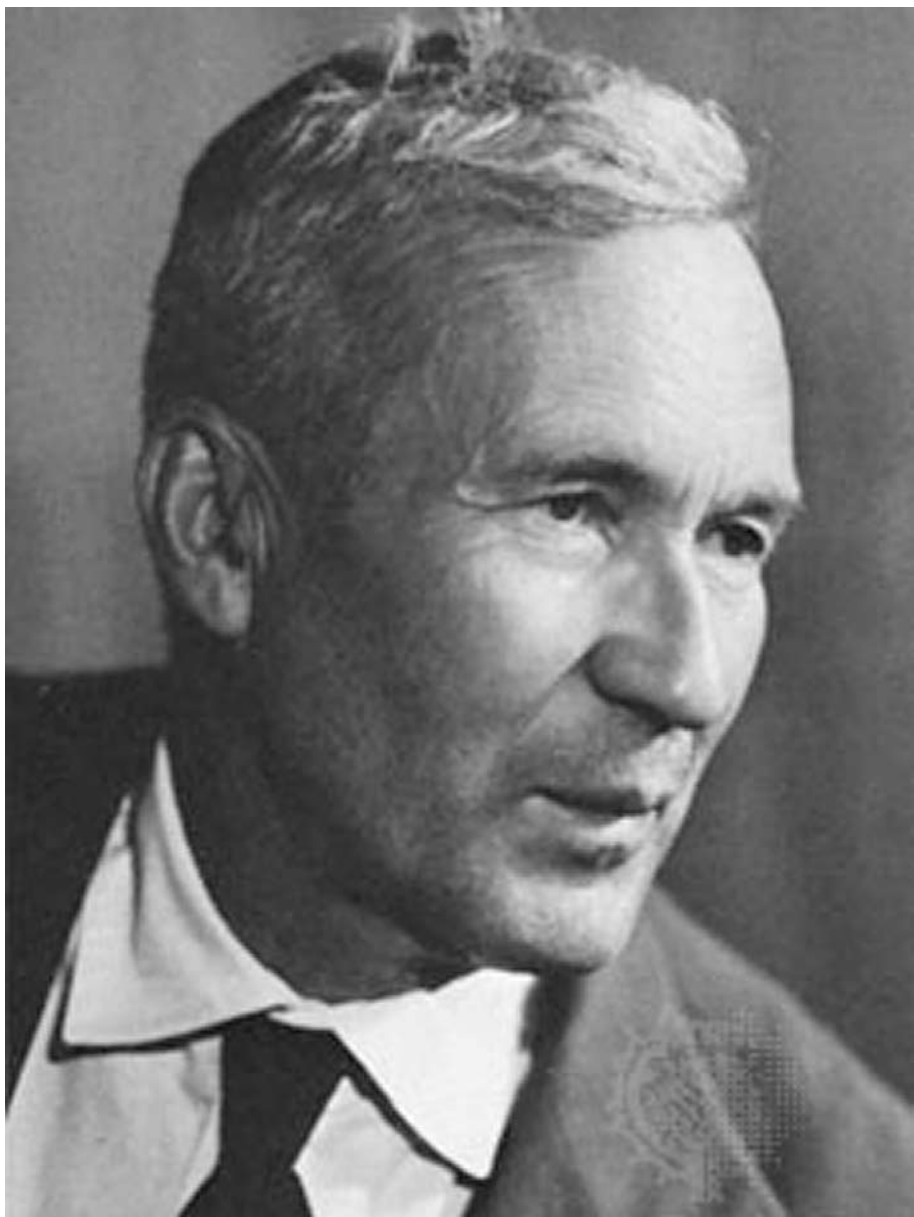
2.5. Consideraciones finales

Conviene señalar que toda la física tiende a la unificación de conceptos. Newton unificó dos conceptos aparentemente muy distintos cuando observó que la caída de la manzana y la rotación de la Tierra alrededor del Sol se debían a una misma fuerza. Maxwell unificó los campos magnético y eléctrico y mostró que eran dos caras de una misma moneda. Después, Einstein unificó el electromagnetismo con la cinemática; intentó, pero no consiguió, unificar el electromagnetismo con la gravitación (los dos únicos campos conocidos a comienzos de siglo). Esa tendencia a unificar conceptos fue uno de los "leitmotive" de la física durante todo el siglo, y llevó, en los últimos años, a una teoría unificada del campo electromagnético con las llamadas interacciones débiles. Tal unificación permitió predecir la existencia de nuevas partículas, las W (positiva y negativamente cargadas) y la Z (neutro). Luego tuvo lugar la tentativa de unificación con las fuerzas nucleares, el modelo estándar, que explica muy satisfactoriamente los fenómenos en los que no interviene la gravitación. La unificación con la gravitación, un verdadero desafío para físicos y matemáticos, queda para el este siglo.

Observemos que, al considerar lo muy pequeño o lo muy grande, el hombre se escapa de la escala macroscópica habitual: pero, obvia-

mente, aún quedan muchos interrogantes en esa escala. El estudio de los sistemas complejos, compuestos por millones y millones de átomos y moléculas, es otro de los grandes problemas a resolver. Es el campo que se denomina genéricamente *materia condensada*, que adquiere cada día más importancia teórica y práctica. El paso inicial fue dado por el descubrimiento de los semiconductores, que permitieron el desarrollo de los transistores y la substitución de las válvulas electrónicas por éstos. Sin este cambio hubieran sido imposibles las computadoras en su forma actual, pues se hubiera necesitado una cantidad muy grande de válvulas y, dada su vida media, siempre estaría alguna en reparación. Además, el volumen de una computadora sería enorme. Entre paréntesis, los semiconductores y las válvulas dieron un ejemplo concreto de la importancia que tiene para un país en desarrollo el contacto con los medios científicos avanzados. El presidente Nasser de Egipto, realizó un gran esfuerzo financiero para construir una fábrica de válvulas; cuando la terminó, no pudo hacer otra cosa que cerrarla, pues los transistores ya la habían hecho obsoleta.

La física sigue enfrentándose a grandes retos, tanto de carácter práctico como teórico, a comienzos del siglo XXI. El estudio de los sistemas complejos dominados por sistemas de ecuaciones no lineales, tal como la meteorología o las propiedades cuánticas de los materiales, han posibilitado el desarrollo de nuevos materiales con propiedades sorprendentes. A nivel teórico, la astrofísica ofrece una visión del mundo con numerosas preguntas abiertas en todos sus frentes, desde la cosmología hasta la formación planetaria. La física teórica continúa sus intentos de encontrar una teoría física capaz de unificar todas las "interacciones" en un único formulismo en lo que sería una "teoría del todo". Entre las teorías candidatas debemos citar a la "teoría de supercuerdas".



Andrei Nicolaevich Kolmogorov fue el autor de la axiomática más aceptada del cálculo de probabilidades.

3. La teoría de la probabilidad en el siglo XX

Para juzgar lo que se debe hacer para obtener un bien o evitar un mal, no basta con considerar el bien o el mal en sí, sino también la probabilidad de que ocurran. (Lógica de Port Royal).

M. Russell no parece estar satisfecho de lo que digo acerca de la probabilidad. Yo tampoco lo estoy, y sería muy feliz si M. Russell tuviera algo más satisfactorio que proponer. (H. Poincaré, "La science et l'hypothèse").

3.1. Introducción

El siglo XX es el siglo de oro de la probabilidad. Este desarrollo alcanza su culminación en el llamado "período heroico" que va desde 1925 a 1940, y se inicia en el primer decenio del siglo con el teorema de Liapunov, la ley fuerte de los grandes números de Borel y el descubrimiento de las cadenas de Markov.

A este desarrollo contribuyeron tres escuelas de probabilistas bien diferenciadas: la escuela rusa, con nombres tan importantes como Kolmogorov, Markov, Khintchine y Liapunov; la escuela francesa, con Paul Lévy, Maurice Fréchet, Fortet y, después, M. Loève, Meyer, Tortrat y Neveu; la escuela americana, con Doob, Lindeberg, von Mises y Feller (estos tres últimos emigrados de Europa).

La evolución de la probabilidad en el siglo XX ha seguido tres direcciones: la probabilidad matemática, la filosofía de la probabilidad y el campo de las aplicaciones, principalmente en física, biología, investigación operativa e incluso en sociología. La probabilidad es la

base de la estadística. Todos estos desarrollos han tenido mucho que ver con la definición de la probabilidad como una *medida*, siguiendo la primera dirección.

El progreso de la probabilidad en estos campos diversos se ha efectuado según su propia cronología, pero nos parece irrelevante seguirla, dada la casi simultaneidad con que se han realizado los diversos avances.

3.2. La probabilidad como medida

La *definición clásica* dada por **Laplace**, según la cual la “probabilidad de un suceso es el cociente de dividir el número de casos favorables a la ocurrencia de ese suceso por el número de casos posibles del mismo suceso”, encuentra dificultades insuperables para elaborar una teoría general de la probabilidad. La principal razón es que los casos posibles deben gozar de “igual probabilidad de aparecer” (principio de indiferencia de Laplace), y esto sólo acaece en casos especiales, en que el aparato que produce el suceso posee homogeneidad y simetría en su composición, cosa que ocurre, por ejemplo, cuando se trata de monedas o dados. Por otra parte, esta definición encierra *circularidad*, ya que en el “principio de indiferencia” figura la palabra “probabilidad”, objeto de la definición.

Además, la aparición de variables aleatorias discretas con infinitos valores, como las de Poisson, y de variables absolutamente continuas, como las gaussianas, hicieron evolucionar paulatinamente el concepto de distribución de probabilidad hacia modelos que englobaran todas estas posibilidades. Ello implicaba también ahondar en el concepto mismo de probabilidad.

Ya en 1909, **Emile Borel**, en su famosa memoria *Les probabilités et leurs applications arithmétiques*¹, confiere a la noción de probabilidad la propiedad de ser una *medida*. Durante una larga década la idea de Borel encuentra reacciones hostiles por parte de los probabilistas.

¹ E. Borel, *Les probabilités et leurs applications arithmétiques* (Palermo 1909)

Pero, en 1923, **Norbert Wiener**, en su *Differential space*² trata las probabilidades como medidas. En el mismo año aparecen dos memorias: una firmada por **Lomniki** y otra por **Steinhaus**. Ambas estudian, sobre nuevos fundamentos, las relaciones entre las probabilidades discretas y la teoría de la medida. En 1933, aparece, finalmente, la famosa monografía de **Kolmogorov** *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*³, donde, por primera vez, se describe explícitamente la naturaleza de los objetos matemáticos que constituyen el objeto de la teoría de la probabilidad.

El origen de estos objetos matemáticos son los «experimentos con regularidad estadística», y la manera en que Kolmogorov los matematizó fue ésta: el conjunto de resultados posibles es un conjunto de puntos C ; la familia de grupos de resultados que puede, en principio, obtenerse, es una sigma-álgebra de subconjuntos de C , a los que se asigna una *función de probabilidad* P , tal que:

1) Los valores de P están comprendidos entre cero y uno, ambos números incluidos;

2) la probabilidad de C es uno y la de su complementario, el conjunto vacío, es cero;

3) para cualquier familia numerable de subconjuntos disjuntos de C , la probabilidad de la *unión* de estos conjuntos es igual a la suma de las probabilidades de cada uno (axioma de aditividad).

Esto quiere decir que a cada experimento corresponde un *espacio de probabilidad*, definido por el espacio C , la sigma-álgebra y la probabilidad P . Según esto, la teoría de la probabilidad no sería más que un capítulo de la teoría de la medida. Esta afirmación es cierta «de algún modo» cuando se trata de la probabilidad matemática⁴.

² N. Wiener, *Differential Space, Quantum Systems and Prediction*, con A. Siegel, B. Rankin, W.T. Martin (Cambridge, Mass., 1966) (póstumo).

³ N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Berlín 1933).

⁴ Decimos “de algún modo”, porque los problemas que atañen a la teoría de la probabilidad son a veces específicos, en contraste con los generales de la teoría de la medida. Para la discusión de esta cuestión, y otras que aparecen en este trabajo, remitimos al lector a nuestra *Filosofía de la probabilidad*, Tirant lo Blanch (Valencia 1992).

3.3. Teoremas del límite

Toda labor científica bascula entre dos mundos: el mundo de los hechos y el mundo de los conceptos, esto es, el mundo *empírico* y el mundo *conceptual*. La finalidad de la metodología científica consiste en relacionar ambos mundos.

En teoría de la probabilidad, el mundo de los hechos está constituido por las observaciones de un experimento, las frecuencias con que aparecen. El mundo conceptual está formado por las probabilidades. La cuestión básica consiste en pasar de frecuencias relativas de observaciones de un suceso a probabilidades de que ocurra ese suceso. O, si se quiere, a obtener aproximaciones de las probabilidades a partir de las frecuencias.

Este paso se realiza teniendo en cuenta la llamada *ley del azar* que, en su sentido empírico, es llamada también *ley de estabilidad de las frecuencias* y, en su sentido matemático, *ley de los grandes números*.

Supongamos un suceso cuya probabilidad es p que, después de n observaciones, tiene una frecuencia relativa f_n . Supongamos también que la probabilidad del suceso en la $(n+1)$ realización no está afectada por el conocimiento de su frecuencia relativa en la consecución de las n primeras realizaciones (condiciones de Bernouilli). Dicho toscamente, lo que la ley de los grandes números afirma es que la diferencia, en valor absoluto $|f_n - p|$, puede hacerse menor que un número real positivo fijo ε , por pequeño que sea, cuando el número n de observaciones es suficientemente grande.

Lo que demostró **Jacobo Bernouilli** en su *Ars conjectandi*⁵, obra publicada póstumamente en 1713, es, precisamente, que «la probabilidad de que esa diferencia sea, en valor absoluto, menor que un número fijo k , por pequeño que sea, tiende a uno cuando n tiende a infinito, para todo número positivo k por pequeño que sea».

⁵ J. Bernouilli, *Ars conjectandi* (Basilea 1713). Hay versión en inglés por Bing Sung, Harvard Univ., Depart. of Statistics Technical Report, 2, 1966.

Podemos afirmar, sin miedo a equivocarnos, que este resultado es fundamental para justificar la inferencia estadística. Más tarde, el ruso **Tchebychev** obtendría una generalización de este teorema. Pero es ya en el siglo XX, cuando este resultado, el llamado *teorema central del límite*, (cuya primera versión es debida a **Abraham de Moivre**) y la *ley del logaritmo iterado*, logran su gran desarrollo, a cargo de probabilistas tan eminentes como **Kolgomorov, Levy, Markov, Khintchine, Wiener, Feller o Doob**.

3.4. El concepto filosófico de la probabilidad

El gran impulso dado por la teoría de la medida al cálculo de probabilidades acabó por separar el aspecto matemático de la probabilidad, por una parte y del problema de su interpretación, por otra.

El afán por introducir el concepto de probabilidad al margen de su formalización matemática, y la imposibilidad de así hacerlo de modo general, condujo a elaborar *teorías* filosóficas de la probabilidad. Históricamente, la filosofía de la probabilidad es obra del siglo XX.

En 1921, aparece el *Treatise on probability*⁶ de **J. M. Keynes**, en el que se define la probabilidad como relación lógica entre proposiciones. Análoga línea de pensamiento siguen los trabajos de **H. Jeffreys**, el primero de los cuales data de 1919, **Rudolf Carnap** y **Bernard Koopman**.

En 1926, **Frank Ramsay** escribe su famosa monografía sobre los fundamentos de la probabilidad, que pretende asentar en los «grados de creencia». Análoga base psicológica tienen los trabajos de **Bruno de Finetti**, **I. Good** y **Leonard Savage**, auténticos fundadores, con Ramsay, de la probabilidad subjetiva.

La interpretación de la *probabilidad con base empírica* es antigua. Los «aritméticos políticos» emplearon ya las frecuencias, como fundamento de sus conjeturas. Pero la elaboración de teorías de la probabilidad, asentadas en las frecuencias de los resultados de un

⁶ J.M. Keynes, *Treatise on probability* (Cambridge 1921).

experimento, es algo reciente. Entre los constructores de estas teorías, citemos a **von Mises**, **Reichenbach** y **Salmon**.

El gran movimiento filosófico creado en torno al concepto de probabilidad, que se ha desarrollado durante los 100 últimos años, podemos decir que estaba latente desde que empezó a usarse la palabra probabilidad. De siempre se dio a la palabra probabilidad una doble acepción: «de re», una propiedad de las cosas, y «de dicto», lo que se dice de las cosas. En palabras de **Carnap**, la primera acepción corresponde al concepto empírico de probabilidad y la segunda, al concepto epistemológico. Estos dos aspectos aparecen explícitos en J. Bernouilli, y fueron utilizados, a conveniencia, por Laplace. Los hemos encontrado mencionados por los probabilistas del período clásico con diversos nombres: «motif de croire» (de dicto) en **Condorcet**; «chance» (de re) en **Poisson**; «esperanza» (de dicto) en **Bufón**; «credibilidad» (de dicto), en **Bertrand Russell**.

Las teorías filosóficas de la probabilidad pueden ser vistas hoy como interpretaciones de la definición matemática de la probabilidad. Sin una interpretación de esa definición, no es posible aplicar a la práctica la teoría matemática de la probabilidad.

3.5. Las interpretaciones de la probabilidad

Escribe **von Weizsäcker**: *La probabilidad es uno de los ejemplos pendientes de «paradoja epistemológica» en que podemos, por fortuna, utilizar sus conceptos sin entenderlos*⁷.

En efecto: a pesar de los esfuerzos empleados en dilucidar qué es la probabilidad en las últimas décadas, sigue siendo un enigma. Esto explica los distintos enfoques que le dan sus usuarios y que, sucintamente, exponemos a continuación. Un desarrollo extenso del tema puede verse en nuestro libro *Filosofía de la probabilidad*, ya citado.

⁷ C.P. Weizsäcker, *Probability and quantum mechanics*, Brit. Jour. Phil. Scienc., 1973.

Partimos del principio, sugerido por **Max Black**, según el cual *ninguna definición de probabilidad es posible o necesaria*⁸.

Una interpretación de la probabilidad debe recoger, idealmente, todos los usos de la probabilidad en la ciencia, en la técnica y en el lenguaje común. La exigencia es demasiado ambiciosa, y no creemos que pueda reconstruirse una interpretación de la probabilidad que satisfaga plenamente tal idealización. Por todo esto, hablamos de «teorías» de la probabilidad, o de interpretaciones de la probabilidad, en plural. Cada teoría intentará la interpretación de un conjunto de aplicaciones de la probabilidad, sancionadas por el uso, a nivel sectorial. Las teorías se basan, pues, en los usos que de ellas se hacen, y pretenden, a su vez, regular tales usos. Si no se diera esto último, si no tuvieran carácter *prescriptivo*, no serían teorías, sino meras *descripciones* de los usos corrientes. El uso informa, pues, la teoría y ésta regula la extensión del uso.

Los usos de la probabilidad son muy variados, tanto los formales como los informales.

Los usos formales de la probabilidad, y conceptos asociados, se hallan en la construcción de *modelos* de los fenómenos aleatorios, en el diseño de *sistemas* para la inferencia estadística y la toma de decisiones, en la verificación y contraste de las leyes científicas y en los intentos de crear una lógica inductiva.

De modo informal la probabilidad extiende su uso a multitud de situaciones, en las que aparece como «guía de la vida», según expresión del obispo **Butler**⁹. Entra aquí el *sentido común o popular* de la probabilidad, que comprende expresiones corrientes del lenguaje como «es probable», es «verosímil», «creo o espero» que ocurrirá tal cosa, etc.

Es esta amplitud de visiones de la probabilidad la que obliga a la pluralidad de teorías.

⁸ M. Black, *Margins of precision* (Ithaca 1970).

⁹ J. Butler, *The analogy of religion, natural and revealed, to the constitution and course of nature* (Londres 1736).

3.5.1. Interpretaciones frecuenciales

Estas teorías resultan de la asunción de un elemento de «azar» en la naturaleza son consecuencia inmediata del indeterminismo físico o, de otro modo, de la existencia del azar en la naturaleza. Si este azar existe, habrá una disposición, por parte de la misma naturaleza, a que se produzca el hecho fortuito: si se pone en acción esa disposición (se experimenta), los resultados aparecerán dispuestos en una distribución de frecuencias.

Tenemos, así, dos interpretaciones distintas de las probabilidades físicas: una «ex ante» de experimentar, dada por la «estructura» del mecanismo de azar, y otra «ex post» de la experimentación, dada por las frecuencias de las observaciones.

Las teorías de la probabilidad, basadas en las frecuencias, pueden contemplar, o no, experiencias repetitivas; pueden definir probabilidades directamente, como límites de esas frecuencias, o pueden introducirlas axiomáticamente.

La obtención directa de probabilidad, a base de pruebas repetidas de frecuencias, se basa en las leyes de los grandes números de Bernouilli-Borel y Kolmogorov. La sucesión de frecuencias relativas tiene un límite, según estas leyes, y este límite se identifica con la probabilidad de ocurrencia del suceso.

Las axiomáticas frecuencialistas toman como base lo que expusimos en la sección 3.2, donde el espacio de referencia es el *espacio muestral*, constituido por los resultados posibles de un experimento. La más aceptada es la denominada de *Kolmogorov-Cramér-Fréchet*, que recoge las ideas de estos tres grandes probabilistas. En estas axiomáticas, la probabilidad es la contraparte conceptual de la frecuencia empírica. La ley de estabilidad de las frecuencias constituye la base para establecer el puente entre lo empírico y lo conceptual. La finalidad de estas axiomáticas es establecer un modelo matemático de los fenómenos que muestran regularidad estadística. De ahí su popularidad entre los usuarios de la estadística.

Con respecto a todas las teorías frecuentistas, hemos de tener presente que, no sólo no es posible calcular directamente probabilidades de origen frecuencial, sino que es imposible asegurar su existencia. Todas las teorías se limitan a obtener *estimaciones* de ellas.

3.5.2. La probabilidad como propensión o «chance» objetiva

Como en el caso de las interpretaciones frecuentistas, apela-mos aquí al azar existente en la naturaleza. En este caso, se trata de un *indeterminismo* considerado «ex ante», antes de que se realicen los experimentos. Se asume que existe un azar físico, y con ello habrá una *disposición*, por parte de la naturaleza, a que se produzca el hecho fortuito».

Esta disposición puede considerarse como la contraparte, «ex ante» de experimentar, de las frecuencias obtenidas «ex post» en la experimentación, y da lugar a una probabilidad de origen físico.

Al referirse al experimento consistente en lanzar una moneda, **Ian Hacking** habla de *una propiedad disposicional de la moneda: lo que la frecuencia, a largo plazo, es o sería, o puede ser. Hay -añade- una palabra para el suceso activo y otra para la propiedad disposicional pasiva*¹⁰. Para esta propiedad disposicional, propone resucitar una palabra del siglo XVII, la palabra «chance», que, según él, se utilizó en este sentido. Karl Popper llama a esta propiedad disposicional «propensión física». Este nombre es el que ha logrado imponerse, por el peso específico del autor, padre de la teoría.

En 1957, Popper escribe su famoso artículo *The propensity interpretation of the calculus of probability and the quantum theory*¹¹, que levanta un gran revuelo entre los probabilistas y filósofos de la ciencia. Dos años más tarde, afina los conceptos expuestos en un nuevo artículo¹².

¹⁰ I. Hacking, *The logic of statistical inference* (Cambridge 1965).

¹¹ K. R. Popper, *The propensity interpretation of the calculus of probability and the quantum theory*, en S. Korner (ed.): *Observation and interpretation* (Nueva York 1957).

¹² K. R. Popper, *The propensity interpretation of probability*, Brit. J. Phil. of Sci., 10.

Como consecuencia de estos trabajos, y durante casi 25 años, se produce una amplia literatura en torno al tema: adhesiones, convergencias, críticas de todo género y en todos los tonos. Popper permanece callado, o casi callado, hasta que, en 1982 y 1983, irrumpe nuevamente, con nuevos datos y nuevas aclaraciones en lo que, según sus palabras, es el “gran descubrimiento de su vida”, con su famoso “Post Scriptum” a la *Lógica de la investigación científica*¹³, obra maestra.

Podemos tener una idea de esta propiedad disposicional de la estructura experimental si pensamos en el experimento de lanzar un dado. La disposición, mejor quizá predisposición, a que salga un as dependerá de la calidad del dado (cargado en un sentido o correcto), del impulso del lanzamiento y del campo gravitatorio. Sólo esta “disposición” puede otorgar a la propensión un carácter que emana de la prueba *individual* y no de la serie de pruebas que caracteriza a la interpretación frecuencial; si bien estas vinculaciones entre ambas interpretaciones y en cada prueba son tan integradas, gracias al teorema de Bernouilli, que, en el límite, propensión implica límite frecuencial.

3.5.3. La probabilidad como relación lógica objetiva

Lo sustantivo en esta concepción de la probabilidad es la *relación entre las evidencias* que presentan pares de proposiciones, más bien que los correspondientes sucesos, cuya realización expresan. Se supone que ambas proposiciones pertenecen al mismo lenguaje.

Lo más característico de la interpretación lógica objetiva de la probabilidad, es que no tiene sentido hablar de la probabilidad de una proposición considerada en sí misma. Esta probabilidad ha de considerarse siempre en *relación* con la evidencia contenida en otra proposición, considerada como un cuerpo de evidencia. Cuando se trata, por ejemplo, de conjeturar o emitir un juicio acerca de la probabilidad de que salga cara en el próximo lanzamiento de una moneda,

¹³ K. R. Popper, *Post Scriptum a la Lógica de la investigación científica. Realismo y el objetivo de la ciencia* (Madrid 1985).

el cuerpo de evidencia está constituido por los dos casos posibles, y la evidencia parcial, de la cuestión demandada, está representada por el único caso posible.

Keynes, en su *Tratado*, ya citado, considera a **Kahle** como el primer escritor que se ocupó de este tipo de probabilidad, en sus *Elementa logicae probabilitium*¹⁴. Pero los principales propulsores de la probabilidad lógica relacional han sido los grandes lógicos de la *Escuela de Cambridge*, iniciada por **W. E. Johnson** en los años 20, y cuyos representantes más salientes han sido **John Maynard Keynes** y **Harold Jeffreys**. A estos nombres hay que añadir el del alemán **Rudolf Carnap**.

Keynes llama a estas dos proposiciones "primarias". Laplace, en la definición que se ha hecho *clásica*, habla de determinar la probabilidad de la "conclusión" en base a una "hipótesis". En lo sucesivo, preferimos denominarlas, respectivamente, "conclusión" y "premisas".

Así como hay vinculación de necesidad lógica en la conjunción de premisas y conclusión de los argumentos deductivos válidos, así también existe una *casi vinculación* paralela, de soporte parcial en los argumentos inválidos. Esto quiere decir que si hay *buenas razones*, aunque no conclusivas, para creer en algo, es innegable que debe haber una relación de *casi-vinculación*, de soporte parcial, no deductivo. Y a esta clase de relación puede llamarse, muy bien, "probabilidad".

El ejemplo más plausible de casi-vinculación lo proporciona, sin duda, el *silogismo proporcional* o *estadístico*.

Un X% de A son B,

C es A;

C es B.

¹⁴ L. M. Kahle, *Elementa logicae probabilitium methodo mathematica, in usum scientiarum et vitae adornata* (Halle 1735).

Este $X\%$ puede ser utilizado como medida de la *probabilidad*: las premisas soportan la conclusión al *grado* $X\%$. Así, si el 80% de los valencianos habla valenciano, y Juan es un valenciano, tomado al azar, la probabilidad de que Juan hable valenciano es 0,8.

3.5.4. Interpretaciones subjetivistas

El status ontológico de la probabilidad subjetiva está inmerso en lo que hemos llamado “sentido común” de probabilidad: intento de juicio, acerca de una situación incierta, a cargo de un sujeto. El elemento nuevo que añade la probabilidad subjetiva es la *coherencia* en los juicios del sujeto. De Finetti lo expresa claramente: *Autores propiamente subjetivistas (como el presente), piensan que coherencia es todo lo que la teoría puede prescribir*¹⁵.

La coherencia de los grados de creencia de una persona equivaldría a que se verificaran los axiomas de la probabilidad matemática. La coherencia le llevaría a un sujeto a no apostar en su contra. Así, el axioma de aditividad implica que, si el grado de creencia en un suceso es p y el de su negación es q , debe cumplirse que $p + q = 1$.

La construcción de una probabilidad con base subjetiva, y con posibles aplicaciones en la ciencia, es relativamente reciente, y ha tenido que pasar por muchas dificultades. A pesar de ello, el interés por las *creencias* y la valoración de sus grados, suscitó interés creciente con el inicio del siglo XX. El *Treatise* de J. M. Keynes basaba ya la teoría de la probabilidad en los grados de creencia. Pero las creencias, acerca de la relación entre premisas y conclusión, tienen en Keynes carácter objetivo, como ya se vio. Contra esto protestó Emile Borel en *A propos of a Treatise on Probability*¹⁶, quizá el primer trabajo, propiamente dicho, sobre probabilidad subjetiva. En él se contiene una definición suficientemente precisa de probabilidad subjetiva, cuando escribe: *Esta probabilidad es relativa a mi juicio*

¹⁵ B. de Finetti, *La previsión: Ses lois logiques, ses sources subjectives*. Ann. De l'Institut Henri Poincaré (París 1937).

¹⁶ E. Borel, *A propos of a Treatise on Probability* (Londres 1924). Reimpreso en *Studies in subjective probability*, ed. Por Kyburg y Smokler (Londres 1940).

y a la información que yo poseo acerca de la experiencia que ha ocurrido; precisamente no sería la misma, necesariamente, para otro observador que poseyera distinta información. En ese trabajo está también el germen del método para medir grados de creencia, conocido con el nombre de *método de la apuesta*. Así, leemos, poco después: *Pero parece que el método de apostar nos permite, en la mayoría de los casos, una evaluación numérica de las probabilidades que tiene, exactamente, las mismas características que la evaluación de precios por los métodos de intercambio.*

Dos años después, en 1926, **Frank Ramsay** escribía, con el título *Truth and probability*¹⁷, un trabajo en el que asentaba las bases de la probabilidad subjetiva. Ramsay estaba de acuerdo con Borel acerca del método de la “apuesta”, y mantenía la tesis de que el grado de creencia estaba relacionada con la *utilidad*, abriendo, con esto, la puerta al *behaviorismo*. Nacía así un positivismo psicológico, ahogado durante una veintena de años por el *positivismo lógico*, fuertemente apoyado por el Círculo de Viena. Su triunfo llegaría más tarde por arte, sabiduría y tesón de Bruno de Finetti y Leonard Savage, como figuras más salientes. Como autor de otra tendencia, la noción intuitiva de los grados de creencia, tiene también cabida, en esta lista de pioneros de la probabilidad subjetiva, **Bernard O. Koopman**, autor de *The bases of probability*¹⁸.

Hemos visto que, tanto Borel como Ramsay, recurren a la *apuesta*, como elemento dilucidador en nuestros juicios, elevada a la categoría de método para medir los grados de creencia. Por grados de creencia hemos de entender *sentimientos de distinta intensidad*, según expresión de von Wright¹⁹. La evaluación directa de nuestras creencias, como de todo aquello que concierna nuestro espíritu, es sumamente complicada. Para obtener juicios de probabilidad, valorados cuantitativamente, hemos de emplear una escala numérica, en cuya

¹⁷ F. Ramsay, *Truth and probability* (Londres 1926). Reimpreso en *Studies in subjective probability*, ed. Por Kyburg y Smokler (Londres 1940).

¹⁸ B. Koopman, *The bases of probability*, Bull. Amer. Math. Soc. 46. Reimpreso en *Studies in subjective probability*, ed. Por Kyburg y Smokler (Londres 1940).

¹⁹ G. H. Wright, *The logical problem of induction* (Connecticut 1957).

construcción habrán de emplearse ejemplos en los que intervenga el azar, lo que nos aleja de la subjetividad.

Ante la dificultad de medir directamente los sentimientos suele acudir a medir las manifestaciones de estos sentimientos. La apuesta es uno de estos procedimientos, pues ofrece algo exterior, palpable y medible, como contraparte de nuestros grados de creencia. Así, puedo emitir este juicio de probabilidad subjetiva: Apuesto 2 contra 3 que lloverá mañana; pero un metereólogo, cuyas creencias están más documentadas que las mías, puede apostar 3 contra 4 a que ocurra ese suceso.

La probabilidad subjetiva pertenece a las psicológicas o epistemológicas. Se basa en el azar "subjetivo" o sea el debido al *desconocimiento de las causas* de los sucesos, lo que produce un ambiente de incertidumbre. La *posibilidad* es epistémica y la *verdad* perseguida es una propiedad del estado de la mente, esto es, el conocimiento o creencia. La persona que está en posesión de esta verdad ha de ser *consistente*, en el sentido estricto de la palabra, y el cuerpo de creencias que posee ha de ser *coherente*.

Para que un conjunto de creencias esté racionalmente justificado debe ser tal que pueda ser medido por un conjunto coherente de probabilidades matemáticas, esto es, conformes con los axiomas. La probabilidad subjetiva es susceptible, como teoría *normativa*, de una axiomatización, siguiendo los cánones corrientes. El proceso conducirá a lo que llamamos "calculización" de la teoría.

Desde Ramsay, que fue el primero que intentó construir una axiomática de la teoría de la probabilidad subjetiva, son numerosos los intentos realizados con idéntico fin. La primera pregunta que surge es por qué tal proliferación de axiomáticas, muy por encima de las que se han elaborado en las demás interpretaciones de la probabilidad.

3.6. Valoración de las teorías

Ya desde los primeros tiempos aparece la probabilidad con las dos caras de Jano. Es empírica en las leyes y procesos de azar, y es

epistemológica, en la valoración de los grados de creencia. Pascal es un claro ejemplo de esta dicotomía, con su problema del *reparto* en un juego de azar, y con su famoso argumento de la *apuesta* sobre la existencia de Dios.

Si tenemos en cuenta el empleo de la probabilidad en campos tan distintos como la estadística, la ciencia actuarial, la física, la mecánica cuántica, las ciencias biológicas y sociales, la psicología, la metodología, las ciencias de prospección, etc., la reducción de las teorías de la probabilidad a sólo dos, parece inaceptable. La teoría matemática de la probabilidad ha de ser completada en cada aplicación con una adecuada interpretación. Fréchet, uno de los grandes probabilistas matemáticos, se expresa claramente sobre este punto: *Es rigurosamente imposible obtener aplicación concreta alguna, cualquiera que fuese, de la teoría axiomática.*

Abocados al *pluralismo* en materia de probabilidad, vamos a hacer un breve repaso de las teorías estudiadas, planteando nuestra opinión sobre cuándo y cómo pueden ser utilizadas- y de hecho se utilizan- sin ningún menoscabo del progreso científico al que prestan su apoyo.

3.6.1. Teorías frecuenciales

Estas teorías se apoyan en la descripción del pasado para predecir el futuro, pero tienen el inconveniente de que los experimentos nunca son repetidos con exactitud. No logran superar la barrera de la *no efectividad*, a pesar de ser suplementadas por reglas de estimación. Se mantienen en su uso muy generalizado, merced a una *cláusula metafísica*: la fe en las previsiones anunciadas, en base a la estabilidad de las frecuencias. Su uso es debido a razones psicológicas y metafísicas; estas razones son insuficientes, en sí, para que sean avaladas por la ciencia, salvo que funcionen bien; esto es, precisamente, lo que ocurre con las interpretaciones frecuenciales: *funcionan bien* y constituyen los cimientos de la estadística clásica.

No hay nada en las teorías frecuenciales que se oponga a las reglas de la racionalidad. Entre sus limitaciones está la carencia de

solución para el “caso singular”, esto es, para el suceso no repetible, como “lloverá mañana”.

3.6.2. Probabilidades físicas

Hay una tendencia creciente entre los científicos a creer que debe existir algún concepto de probabilidad de naturaleza u origen físico que ayude a una mejor comprensión de la ciencia. El nacimiento de las teorías propensivistas tiene su origen en la falta de efectividad de las teorías frecuenciales. Parten, como dijimos, de una visión de lo físico empírico “ex ante” de experimentar. La probabilidad física es así dilucidada, pero no definida. Es una característica *irreducible*, no directamente observable, del mundo físico, pero que ha de ser creída sin que importe cómo se llega a esta creencia.

La propensión se apoya, y está asociada, a las condiciones objetivas y subjetivas que generan los sucesos, y no a los mismos sucesos. Estas condiciones han de estar bien definidas, en contraste con lo que ocurre en la probabilidad subjetiva. Pero, como ésta, tiene el inconveniente de no ser (por ahora) medible directamente; Popper acude, para esta medida, a los resultados “ex post”, esto es, a las frecuencias.

Su mejor uso ha de ser en mecánica cuántica, donde elimina las perturbaciones irracionales y de carácter subjetivo. Si algún día se logra una cuantificación directa de las propensiones, en base a una ordenación lineal de las mismas, se habrá dado un paso hacia las aplicaciones a otros campos.

En el estado actual, no son susceptibles de axiomatización, y las más de ellas no son efectivas.

3.6.3. Probabilidad lógico-objetiva

La probabilidad lógico-objetiva murió, en parte, con Carnap en 1961. Ha sido sustituida por el neorrealismo angloamericano: realidad frente a idealismo. Fue combatida por el empirismo radical de Ayer, que rechaza lo formal. Algunos probabilistas modernos, como Benenson y Horwich, pretenden instaurar una teoría lógico-relacional

de carácter objetivo, con concesiones a la subjetividad, explotando el sentido lógico de la probabilidad como fuente de estimaciones racionales de la probabilidad empírica. Pretenden dar, así, sentido a series de estimaciones infinitas falibles. El principal problema de la teoría lógico-relacional es explicar la “evidencia disponible”, que nunca es lograda estadística ni técnicamente.

El fracaso de Carnap y su escuela en el problema de la “decidibilidad” finita, lo suplen en las nuevas teorías, científicos y estadísticos, mediante estimaciones basadas en pequeñas muestras, según los cánones de la inferencia estadística.

La dificultad máxima del logicismo es encontrar una medida única de los grados de creencia.

3.6.4. La definición clásica probabilidad

La probabilidad clásica, como todas las comentadas anteriormente, tiene un uso restringido. Da resultados aceptables cuando el conocimiento de la evidencia relevante que soporta cada una de las posibles alternativas permita aplicar, sin ambigüedades, el “principio de indiferencia”. Las alternativas han de ser distinguibles y *equiprobables*. Pero pretender estas probabilidades iguales a partir de ignorancia o poco conocimiento, es oscurecer el concepto mismo de probabilidad, que no deja de ser un modo de conocimiento. Las dos virtudes de la definición de Laplace son la sencillez y los éxitos prácticos. Sus fallos provienen de la mezcolanza que hace de conceptos subjetivos y objetivos, de su circularidad (en la definición) y de su aplicación restringida al cumplimiento del principio de indiferencia. **Reeves**²⁰ ha propuesto una modificación de la definición clásica, introduciendo la probabilidad como una función de condiciones tanto subjetivas como objetivas, que la liga en cierto modo a la propensión.

3.6.5. Teorías subjetivas

La probabilidad subjetiva está, de algún modo, presente en todo juicio de probabilidad, por el mero hecho de que el acto de juzgar es

²⁰ T. V. Reeves, *A theory of probability* Brit. J. Phil. Sci., 39, 1988.

propio de personas. En el horizonte de la probabilidad debe aparecer siempre un observador.

Esto no significa, como quieren los subjetivistas radicales, que toda la probabilidad sea subjetiva, ni siquiera que la interpretación subjetiva sea la mejor en todas las situaciones. Cuando las condiciones generadoras de la probabilidad están bien definidas, darán mejor resultado otras interpretaciones objetivas; la probabilidad subjetiva se hará, en cambio, imprescindible cuando tales condiciones están mal determinadas o el fenómeno sea irreproducible.

En relación a lo anterior, cabe decir que los juicios subjetivos no discriminan suficientemente entre situaciones en las que se tiene mucha o poca experiencia. Ya vimos cómo la evidencia que sustentaban algunas probabilidades físicas era superior a la que, en análoga situación, asistía al probabilista subjetivo.

La probabilidad subjetiva se encuentra con el grave problema de la medida. Ninguno de los métodos de valoración resuelve el problema con seguridad. En todo caso, previo a la medida de las creencias, está el problema de si el sujeto quiere o puede ordenar racionalmente sus preferencias, de si estas preferencias son para él transitivas o implican otras inconsistencias que él es capaz de resolver.

Los juicios de probabilidad, no formalizados, están impresos en el alma popular, que los formula constantemente. Una formulación subjetiva formalizada puede hacerse siempre de las probabilidades obtenidas por el resto de las teorías. La probabilidad subjetiva puede ser el último recurso, cuando las otras fallan, para obtener enunciados de probabilidad.

3.6.6. A modo de conclusión; ¿sí o no a la probabilidad?

Tras el largo periplo recorrido, y la contemplación de tanta teoría y contra-teoría, el lector puede encontrarse perplejo, sin saber a qué atenerse, en cuanto a probabilidad se refiere. Puede incluso pensar que a falta, no sólo de una definición sino de una teoría convincente, lo mejor sería prescindir totalmente de la probabilidad. De

hecho existen muchos modelos para la estimación y la decisión que no necesitan de la probabilidad.

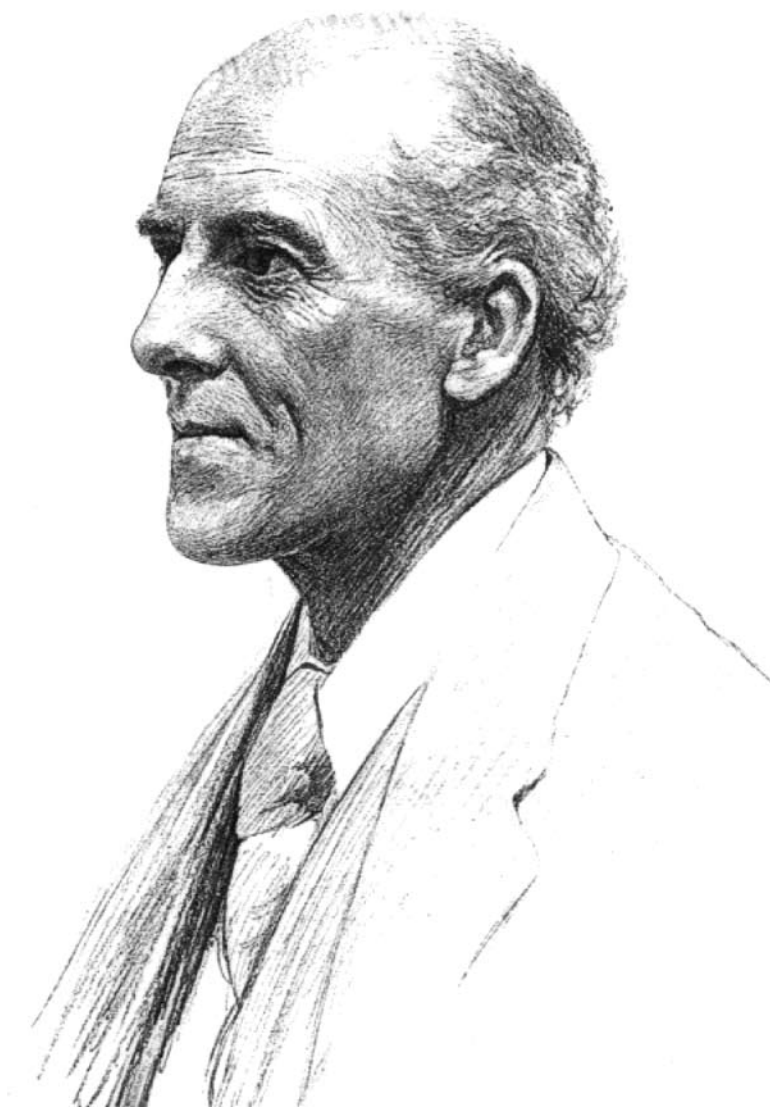
Esto, que es factible en casos particulares, no es posible, ni menos razonable, en general.

Desde el momento en que la metodología científica entrelaza elementos teóricos con hechos factuales, la validez empírica de las conclusiones vendrá afectada por un elemento de riesgo que lleva implícita la probabilidad.

¿Dónde iría a parar sin ella el mundo de la práctica?

Bonitzer añade una consideración que afecta a la probabilidad matemática: *La teoría de la probabilidad se ha mostrado eficaz para resolver problemas propuestos en otros dominios de las matemáticas (teoría del potencial, etc.) más fácilmente y más elegantemente que como se haría sin ella*²¹.

²¹ J. Bonitzer, *Philosophie du hasard* (París 1984).



La "teoría de la significación" de Karl Pearson inicia una nueva era en la ciencia estadística.

4. La Estadística del siglo XX

El tranquilo estadístico ha cambiado nuestro mundo, no tanto descubriendo nuevos hechos o desarrollos técnicos, sino cambiando los modos de razonar, de experimentar y de formar nuestras opiniones acerca de él. (I. Hacking).

Cuando puedes medir aquello de lo que estás hablando, y expresarlo en números, sabes algo acerca de ello: pero cuando no lo puedes medir, ni expresarlo en números, tu conocimiento es débil y de naturaleza no satisfactoria. (Lord Kelvin).

4.1. Introducción

Dentro de la lógica del conocimiento, la estadística posee una lógica propia y, dentro de la metodología general, constituye un método propio, una de las posibles interpretaciones del método científico, la preferida en la actualidad por casi todos los investigadores de la ciencia empírica.

Estas peculiaridades sitúan la ciencia estadística en un contexto particular dentro de la filosofía de la ciencia. Es en este contexto en el que adquiere su unidad como ciencia, dentro de la variedad de interpretaciones y escuelas que la conforman. Desde el punto de vista de la filosofía de la ciencia, vemos en la estadística tres aspectos fundamentales de la lógica del conocimiento: la descripción, la explicación y la predicción. Para cumplir con estos cometidos, la estadística construye modelos asentados en principios que le dicta su propia lógica.

Los orígenes de la estadística se confunden con los de la humanidad; pero sólo en tiempos recientes ha adquirido esta ciencia la categoría de disciplina estructurada. *La estadística* -escribe Rao¹- *posee gran antigüedad, pero escasa historia*.

En la actualidad los fundamentos y métodos de la estadística son profusamente discutidos, dando lugar a diversas *escuelas*. En todas ellas late una misma filosofía, la filosofía de la ciencia estadística.

4.2. Naturaleza de la estadística

Empecemos por distinguir entre *estadísticas* en plural y *estadística* en singular.

Las *estadísticas* son colecciones de datos numéricos presentados de forma ordenada y sistemática. En este sentido, abundan las *estadísticas* en las publicaciones dedicadas a la divulgación. Con el desarrollo industrial europeo, durante la primera mitad del siglo XIX, surgieron cuestiones de público interés acerca de la situación social y, como consecuencia, aparecieron sociedades estadísticas, en algunos países, y se crearon oficinas con el decidido empeño de *obtener, ordenar y publicar hechos calculados para ilustrar las condiciones y prosperidad de la sociedad* (así rezaba el prólogo de la Oficina Central de Estadística, creada en 1800 en Francia; primera del mundo). Así nació la estadística al servicio del estado.

La estadística, como *ciencia*, estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo. En este sentido se estudian los caracteres generales de un conjunto o *colectivo* de datos, prescindiendo de los particulares de cada uno de los objetos que constituyen dicho conjunto.

Metodológicamente, en su panorama actual, la estadística puede ser descriptiva o inductiva. La *descriptiva* utiliza instrumentos gráficos y analíticos que le permiten estudiar caracteres específicos de grandes grupos de fenómenos. La *inductiva* extiende la descripción de ciertas características, observadas en algunos sucesos, a otros

¹ C. R. Rao, *Statistics and truth* (Nueva Delhi 1989).

que no han sido observados; para llevar a cabo esta extensión se puede elegir aquel tipo de descripción que se estima más conveniente. Históricamente se han utilizado tres tipos de argumentos para inducir o *inferir* propiedades en datos no observados.

El primero utiliza *probabilidades* “a priori” individuales para predecir frecuencias estadísticas sobre la totalidad de la serie. Su fundamento lo constituyen las leyes de los grandes números tratadas en el capítulo anterior. Un análisis sobre este enfoque puede verse en Keynes².

El segundo tipo de argumento se sirve de la *frecuencia* con que ha ocurrido un suceso en una serie de ocasiones para determinar la probabilidad de que ocurra “a posteriori”. Dos procedimientos, teóricamente inconsistentes entre sí, fueron comúnmente utilizados: la inversión del *teorema de Bernouilli* y la regla de *sucesión de Laplace*. Ambos son considerados en la actualidad como inválidos.

Se llama probabilidad inversa aquella que es inducida a partir de frecuencias relativas conocidas.

El enunciado del teorema de **Bernouilli**, con el lenguaje actual, es este: “Si p es la probabilidad de que ocurra un suceso en una prueba, bajo ciertas condiciones, y es f_n la frecuencia relativa de ocurrencia de ese suceso en n pruebas, en las que están presentes las mismas condiciones, la probabilidad de que se verifique $|p - f_n| < \varepsilon$ tiende a uno cuando n tiende a infinito, para todo número positivo ε por pequeño que sea”. Aparece claro, en esta formulación, que Bernouilli considera p dado y que f_n es la variable cuya probabilidad se valora “a priori”.

Esta consideración, de p dado, es mantenida a lo largo de toda la demostración. Algunos han pretendido que la intención de Bernouilli era demostrar el teorema de la probabilidad inversa. Si pasó por su mente esa idea, el camino elegido no fue el adecuado. Si Bernouilli hubiera querido obtener una probabilidad inversa debiera haber considerado un experimento “ex post” de su realización y, a partir de f_n

² J. M. Keynes, *Treatise on probability*, (Londres 1923).

conocida, haber estimado p desconocida, aunque constante. Como se ve no es esto lo que dice el teorema.

Laplace atacó el problema de la probabilidad inversa en dos de sus memorias más importantes: *Mémoire sur la probabilité des causes par les évènements*, de 1774, y *Mémoire sur les probabilités*, de 1780. Son quizá los trabajos más importantes sobre inferencia de la época clásica. Laplace obtiene una fórmula que da la probabilidad de que ocurra un suceso en la prueba $(m+n+1)$, habiendo ocurrido m veces en $(m+n)$ pruebas. El caso $m=0$, en que la probabilidad toma el valor $(n+1)/(n+2)$, fue bautizado por Venn con el nombre de “regla de sucesión de Laplace”. En nuestro libro *Filosofía de la probabilidad*³ desarrollamos la fórmula de Laplace y hacemos un análisis crítico de ella mostrando los resultados absurdos a los que da lugar. Remitimos al lector a esta obra.

El tercer enfoque de la inferencia estadística se apoya en esta simple idea: dada la frecuencia con que ha ocurrido un suceso en una serie de ocasiones, ¿con qué frecuencia podemos esperar que ocurra en otras ocasiones? Es el método vislumbrado ya en la *conjetura de Graunt* y sus discípulos, basada en la *estabilidad* de las series estadísticas cuando son analizadas según los cánones sugeridos por Lexis y von Bortkiewicz. Esta inducción de *muestra a muestra* es el germen de la inferencia estadística moderna.

4.3. Evolución de la estadística en el siglo XX

1. Una consecuencia natural de los cimientos echados por **Wilhelm Lexis** a la estadística fue la *teoría de la significación* de **Karl Pearson**. En la búsqueda del significado heurístico de los modelos teóricos, a través de los cuales pretendía obtener una representación lógico-formal de la teoría darwiniana, Pearson había advertido la necesidad de un criterio para probar la adecuación de los modelos a los datos. En el año 1900, daba a luz una *Memoria*⁴ en la que cons-

³ S. Gutiérrez Cabria, *Filosofía de la probabilidad*, Tirant lo Blanch (Valencia 1992).

⁴ K. Pearson, *On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling*, Philosophical Magazine, 5, 50, 1900.

truía un test (*el test de la X^2*) apto para verificar la *accidentalidad* de las discrepancias entre la distribución teórica y la empírica. Este test era el preludio de toda una serie de algoritmos de naturaleza inferencial.

En la teoría de la dispersión el problema que se planteaba era investigar si en los errores fenomenológicos de una sucesión de observaciones estadísticas concurrían *factores sistemáticos*. Es lo que pretendía resolver la “teoría de la significación”: *Un criterio muy simple* -explicaba Pearson en la *Memoria* citada- *para determinar la bondad de ajuste de una distribución frecuencial cualquiera a una curva teórica. He calculado -añadía- la probabilidad de que la divergencia con respecto a una curva sea atribuida al azar del muestreo*. La sustitución de una probabilidad directa por una inversa es aquí un hecho. Con todo, de este test dará **Yule**⁵ una versión en términos de probabilidad directa: *Nos da -dice- la probabilidad de que por efecto de muestreo aleatorio se obtenga un valor del test igual o superior al observado*.

Con estas palabras parece advertir Yule la restrictividad del canon hipotético-deductivo en cuyo ámbito la estadística empezaba a darse reglas y criterios. *El estadístico -escribía- puede mostrar que los hechos están de acuerdo con esta o aquella hipótesis. Pero otra cosa es demostrar que todas las demás hipótesis posibles son excluidas y que los hechos no admiten ninguna otra interpretación*.

2. La *escuela biométrica* estaba de acuerdo con el criterio de Pearson para la confrontación de los esquemas teóricos y los hechos reales, cuando un químico de los laboratorios de una empresa de Dublín, dedicada a fabricar cerveza, lanzó una nueva idea metodológica. Era **William S. Gosset** quien afirmaba que los métodos de sus amigos biómetras no se amoldaban a la naturaleza empírica de los problemas que él tenía que resolver: los postulados y esquemas teóricos válidos para muestras grandes no lo eran para las muestras pequeñas, de las que él disponía. De hecho, los biómetras habían tra-

⁵ G. U. Yule, *An introduction to the theory of Statistics*, (Londres 1912).

bajado, sobre todo Pearson y **Weldon**, a base de realizar muestreos en poblaciones naturales, pero no habían llevado a cabo programas experimentales.

Los datos que obtenía Gosset eran medidas precisas, pero poco numerosas. Se decidió, pues, a construir un test adecuado, y el resultado obtenido, publicado en 1908, constituyó un verdadero avance en la inferencia estadística. Este trabajo fue firmado con el seudónimo de **Student**⁶. Gosset no desdeñó nunca la idea de probabilidad "a priori", necesaria, según él, para determinar las expectativas de que una constante se halle dentro de un intervalo prefijado. Mientras Pearson concentraba toda su atención en la información suministrada por los datos, Gosset acudía insistentemente a la intuición, como corresponde a un investigador experimental con sentido crítico.

3. Con los trabajos de Lexis, Pearson y Gosset, la estadística parecía orientarse en un sentido cada vez más preciso: la búsqueda de métodos inferenciales tendentes a objetivar, todo lo más posible, los procedimientos de investigación. Esta meta ideal fue elevada por **Ronald A. Fisher** a principio heurístico.

Crítico decidido de todo asomo de probabilidad inversa, Fisher se provee de instrumentos susceptibles de extraer la información óptima de los resultados experimentales, mediante una técnica sintéticamente tipificada y semánticamente neutra. *La teoría de la probabilidad inversa* -escribe en "Theory of Statistical Estimation"⁷- *se basa en un error y debe ser rechazada*.

Pearson y Student habían sido más cautos: su rechazo de la probabilidad inversa era puramente operativo. Fisher, en cambio, hace del tema una cuestión ideológica, pero no asume nunca una posición clara con respecto al problema más general de la inducción. *Sobre el argumento fundamental de la inducción* -escribe Bartlett⁸ - *siempre he hallado sus escritos extremadamente oscuros*. **Quetelet** había

⁶ Student, *The probable error of a mean*, Biometrika, 6, 1908.

⁷ R. A. Fisher, *Theory of Statistical Estimation*, Proc. Camb. Phil. Soc., 22, 1952.

⁸ M. S. Bartlett, *Essays in probability and statistics* (London 1962).

aconsejado “replicar”, repetir, las observaciones, a fin de compensar los elementos perturbadores. Student sugería eliminar “a priori” las causas que producen perturbación conocida. Todo esto desagradaba a Fisher, partidario de eliminar lo subjetivo y de *aleatorizar* las muestras experimentales.

Fisher reemprende la *teoría de la significación* como técnica interpretativa al servicio de la investigación experimental, dando prioridad a los programas de experimentos y proponiendo fijar el “umbral de significación” antes de empezar el trabajo indagatorio.

La idea de *la máxima verosimilitud*⁹ es introducida como un criterio natural para estimar los parámetros de la población y para valorar hipótesis a la luz de la información muestral. Fisher impone la adecuada “verosimilitud” en el paso inductivo de la muestra a la población; la ve como predicado de la hipótesis a la luz de los datos.

4. Como en el caso de Pearson y Student, en la metodología de Fisher las hipótesis son contrastadas una por una, sin la menor alusión a la hipótesis alternativa. La idea de un proceso inferencial referido a una pluralidad disyuntiva de hipótesis es original de **Jerzy Neyman**¹⁰, quien sigue a grandes rasgos la metodología fisheriana, acentuando más la distinción entre estimación de parámetros y contraste de hipótesis, entendido este contraste como confrontación entre hipótesis rivales.

Neyman deja su Varsovia natal frecuentemente, a partir de 1926, para recibir enseñanzas y orientaciones del gran Karl Pearson. Una consecuencia de estas estancias en Londres fue su amistad con **Egon S. Pearson** (Pearson Jr.) y una colaboración con él en materia científica. De esta labor de investigación en equipo nació una nueva teoría de los contrastes de hipótesis. Neyman y Pearson dan una regla de comportamiento más dúctil y posibilística que la de Fisher. Es la que figura en los manuales de estadística clásica.

⁹ R. A. Fisher, *On an absolute criterium for fitting frequency curves*, Mess. Math., 41, 1912.

¹⁰ J. Neyman, *On the correlation of the mean and the variance in samples drawn from an infinite population*, Biometrika, 18, 1926.

5. En la década 1930-40 hay tres hechos notables en el desarrollo de la Estadística que no se pueden silenciar.

El primero fue el auge logrado por el *análisis multivariante* de la mano de Mahalanobis¹¹, Fisher¹², Hotelling¹³, Bartlett¹⁴ y Wilks¹⁵, entre otros, y cuyos orígenes están en Galton¹⁶ y K. Pearson¹⁷.

El segundo se refiere al *elevado nivel matemático* alcanzado por la estadística, merced a los progresos logrados por el cálculo de probabilidades. Es el momento en que empiezan a conjugarse los trabajos de los probabilistas rusos y franceses (Kolmogorov, Kintchine, Tchebychev, Borel, Lévy, Fréchet) con la escuela de estadísticos ingleses y americanos; son los comienzos de la *estadística matemática*.

El tercer hecho de esta época, importante en la historia de la estadística, es la aparición de los primeros trabajos sistemáticos sobre *probabilidad subjetiva* a cargo, principalmente, de **Bruno de Finetti**¹⁸, quien, a su vez, redescubrió los que antes había realizado **F. P. Ramsay**¹⁹. Eran las bases sobre las que construir el *análisis bayesiano*. **C. Gini**²⁰ había invitado a poner los problemas estadístico-inferenciales en términos de probabilidad inversa señalando los peligros de ciertos criterios "objetivistas", cuando son empleados sin la asimilación crítica de las premisas conceptuales que los rigen y limitan. En ese mismo año **Harold Jeffreys**²¹ desarrolla la teoría de la probabilidad y de la inferencia de muestras aleatorias en términos

¹¹ P. C. Mahalanobis, *On the generalized distance in statistics*, Proc. Nat. Inst. Sci. India, 12, 1936.

¹² R. A. Fisher, *The use of multiple measurements in taxonomic problems*, Ann. Eugen., 7, 1936.

¹³ H. Hotelling, *The most predictable criterion*, J. Educ. Psychology, 26, 1935.

¹⁴ Op. Cit.

¹⁵ S. S. Wilks, *Certain generalizations in the analysis of variance*, Biometrika, 24, 1932.

¹⁶ F. Galton, *Family likeness in stature*, Proc. Royal Soc., 40, 1886.

¹⁷ K. Pearson, *On lines and planes of closest fit to systems of points in space*, Phil. Magazine, 2, 1901.

¹⁸ B. de Finetti, *La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives*, Ann. Inst. Poincaré, 7, 1937.

¹⁹ F. P. Ramsay, *Truth and probability*, 1926. Reeditado en

²⁰ C. Gini, *I pericoli della statistica*, Actas de la I reunión científica de la *Sociedad italiana de estadística* (Pisa 1939).

²¹ H. Jeffreys, *Theory of probability* (Oxford 1939).

exquisitamente bayesianos. Con todo, las voces bayesianas europeas no fueron escuchadas del otro lado del atlántico hasta prácticamente los años cincuenta. Dentro del grupo de americanos que más han contribuido al avance bayesiano hemos de citar a Good, Anscombe, Hodges y Lehmann, Schlaifer y, sobre todos, **Leonard L. Savage**²² con su obra *The foundations of Statistics*.

6. La *teoría de juegos* y la *teoría de la utilidad* forman parte del rico legado dejado por **John von Neumann**, uno de los matemáticos más insignes de nuestros tiempos. En 1927, con su prueba del teorema del minimax para juegos finitos, von Neumann estableció los fundamentos de la teoría de juegos. Más tarde, en colaboración con **Oscar Morgenstern**, culmina su labor con la publicación de la obra *Theory of Games and Economic Behavior*²³. **Abrahan Wald**²⁴ apreció la conexión entre la teoría de juegos y la de contrastes de hipótesis de Neyman. Wald considera el razonamiento estadístico como un proceso de decisión en ambiente de incertidumbre, como un juego entre el estadístico y la naturaleza.

Los problemas estadísticos fueron provistos de *funciones de pérdida* y de *riesgo* que permiten contemplar una multitud de alternativas posibles sometidas al criterio del *minimax*, de la minimización de la máxima pérdida o riesgo. La escuela de estadísticos americanos se adhirió pronto a este nuevo enfoque de la estadística, principalmente en teoría económica (donde la utilidad sustituyó al riesgo), que permite una síntesis de las teorías de la estimación, del contraste de hipótesis y del análisis secuencial.

La posibilidad de asignar una distribución de probabilidad a los posibles estados de la naturaleza, según los cánones bayesianos, condujo a la teoría de la *decisión bayesiana*. Sus partidarios, Blackwell

²² L. L. Savage, *The foundations of Statistics* (Nueva York 1954).

²³ J. von Neuman y O. Morgenstern *Theory of games and economic behaviour* (Princeton 1944).

²⁴ A. Wald, *Sequential Analysis* (New York 1947).

y Girshick²⁵, Raiffa y Schlaifer²⁶, Ferguson²⁷, De Groot²⁸, argumentan que todo problema específico de inferencia implica una elección entre acciones alternativas cuyo grado de preferencia puede expresarse por una función de utilidad que depende del estado desconocido de la naturaleza. Dada la distribución "a posteriori", basada en la distribución inicial asignada a los estados de la naturaleza y en la información suministrada por la muestra, la mejor acción a tomar es la que maximiza la utilidad esperada.

Frente a estos bayesianos "decisionistas", los bayesianos puros no asumen ningún papel de decisión: la distribución "a posteriori" sobre las hipótesis alternativas es el producto final de la inferencia.

Un compromiso entre bayesianos y no bayesianos son los métodos llamados "empírico-Bayes", no bien vistos por unos y por otros. Fueron introducidos por **Robbins**²⁹ y propenden a una mayor utilización de los datos estadísticos, principalmente en la distribución "a priori".

7. A estos distintos enfoques que atraen la atención de los estadísticos actuales añadiremos otros tres que han tenido menor importancia.

a) El primero es la llamada "inferencia fiducial" de Fisher, que tiene un interés meramente histórico. Fisher opone a la teoría de Neyman-Pearson los "tests de significación", y a los bayesianos, la *teoría fiducial*. En sucesivos trabajos de 1930, 1933 y, de modo más preciso, en 1935³⁰ desarrolla sus ideas sobre "probabilidad fiducial", que le conducirían luego a los llamados "intervalos fiduciales". A pesar de los esfuerzos por rehabilitar la inferencia fiducial, a cargo

²⁵ D. Blackwell y M. A. Girshick, *Theory of games and statistical decisions* (Nueva York 1954).

²⁶ H. Raiffa y R. Schlaifer, *Applied statistical decision theory* (Boston 1961).

²⁷ T. S. Ferguson, *Mathematical Statistics* (Nueva York 1967).

²⁸ M. de Groot, *Optimal Statistical decisions* (Nueva York 1970).

²⁹ H. Robbins, *The empirical Bayes approach to Statistical decision problems*, Ann. Math. Statis., 35, 1964.

³⁰ R. A. Fisher, *The fiducial argument statistical inference*, *Ann. Eugen.*, 6, 1935.

de estadísticos tan eminentes como Fraser³¹, Lindley³², Godambe y Thompson³³, Birnbaum³⁴, etc., no es en la actualidad comúnmente aceptada.

b) La teoría de “verosimilitud” o del “soporte” se contrapone a los puntos de vista, clásico y bayesiano, de la inducción estadística por el distinto uso que hace de la función de verosimilitud.

La estimación de un parámetro (o selección de una hipótesis) en comparación con otro (u otra) se apoya en el soporte que proporciona un conjunto de datos, medido ese soporte por el logaritmo natural de la *razón de verosimilitudes* calculadas a partir de esos datos. El método ha sido ampliamente estudiado por Edwards.

c) Finalmente, nos referimos a la “inferencia estructural”. La creación se debe exclusivamente a **D. A. S. Fraser**, y constituye un nuevo intento de lograr una teoría unificada de la inferencia, como puede verse en su libro *The Structure of Inference*³⁵. La obra de Fraser ha suscitado gran interés en los investigadores, por cuanto aporta pensamiento nuevo, pero no aparece hasta ahora como método de fácil y general aplicación.

8. Los distintos enfoques de la inferencia estadística ponen de manifiesto su carácter sectorial más bien que una teoría unificadora en la cúspide de la estadística general. Las áreas especializadas de la estadística se producen frecuentemente bajo el impulso de su énfasis particular, sin prestar atención a más amplias implicaciones. Ello lleva consigo su desarrollo no armónico. La investigación de una *teoría integradora* de las distintas vertientes del pensamiento estadístico es el reto que tiene planteada la estadística actual.

³¹ D. A. S. Fraser, *The fiducial method and invariance*, Biometrika, 48, 1961.

³² D.V. Lindley, *Fiducial distributions and Bayes theorem*, J. Roy. Statis. Soc., B., 20, 1958.

³³ V. P. Godambe y M. E. Thompson, *Bayes fiducial and frequency aspects of statistical inference in regresión analysis in survey sampling*, J. Roy. Statis. Soc., B. 33, 1971.

³⁴ A. Birnbaum, *On the foundations of statistical inference*, J. Amer. Statis. Ass., 57, 1962.

³⁵ D. A. S. Fraser, *Structure of Inference* (Nueva York 1968).

4.4. Contenidos básicos de la estadística el siglo XX

En otra parte³⁶ hemos escrito que "la estadística está caracterizada por la existencia de una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su *objeto material*; un modo propio de razonamiento, una lógica propia, lo que constituye su *objeto formal*, y unas previsiones de cara al futuro, lo que conforma su objeto o *causa final*. Todo esto, frecuentemente, conlleva o preludia una toma de decisión".

En esta caracterización están implícitos los elementos esenciales de todo problema estadístico, esto es:

1. Una situación real en ambiente de incertidumbre.
2. Existencia o posible obtención de información.
3. Necesidad de unas reglas que permitan conocer situaciones actualmente desconocidas y, en su caso, tomar las decisiones oportunas.

Estos tres puntos plantean buena parte de la problemática teórica y práctica de la estadística actual. El estudio de la situación real de un problema estadístico exige describirla, y esto nos obliga a estudiar los modelos probabilísticos. La información constituye la materia prima de toda investigación estadística. ¿Dónde y cómo recabar esta información? ¿Qué hemos de considerar como información relevante? Finalmente, la inferencia *estadística* y la teoría de la *decisión*, ¿son la misma cosa o hay que distinguir entre ellas?

4.4.1. El modelo de la situación real

1. Puede definirse un *modelo* como una representación de la realidad que intenta explicar en alguna de sus facetas. El modelo debe ser menos complejo que la realidad misma, pero suficientemente completo como para representar con aproximación los aspectos de la realidad que van a ser objeto de estudio. El proceso mismo de pensar corresponde, en su conjunto, a esta definición; de modo continuo

³⁶ S. Gutiérrez Cabria, *Bioestadística*, Ed. Tebar (Madrid 1980).

estamos construyendo modelos de la realidad. Esto explica por qué la construcción de modelos es una operación tan frecuente. Acabamos de pensar en el "hecho de pensar", y en el proceso utilizado hemos construido un "modelo de pensamiento".

Los modelos muestran un espectro tan amplio que ninguna exposición sencilla puede aspirar a contener todos los elementos esenciales para su construcción. En un extremo de la escala tenemos el hecho de que todo esfuerzo humano está basado en la construcción de modelos; en el otro extremo, vemos que los hombres de ciencia y los metodólogos construyen explicaciones de la realidad cuando ésta necesita una comprensión altamente especializada.

Los modelos abstractos, que nuestro pensamiento construye sobre la realidad, se basan en el lenguaje o, como expresan gráficamente Starr y Miller³⁷ "en su orgullosa variante: las matemáticas". Esto juega en favor de la especialización del lenguaje y de la existencia de vocabularios científicos. Esto explica también el desarrollo de la lógica y de las matemáticas.

En el polo opuesto están también los modelos concretos, los que originaron la palabra "modelo": maquetas, retratos, construcciones piloto, etc. Entre ambos extremos, lo abstracto y lo concreto, hay toda una gama de modelos según el grado de abstracción.

2. El primer elemento, el punto de partida, de una investigación estadística es la consideración de una situación real en ambiente de incertidumbre. Debemos tener en cuenta los resultados posibles del fenómeno que se observa o del experimento que se realiza. El hecho fundamental es que hay más de un resultado posible (de lo contrario no habría incertidumbre), y que el resultado, en un momento dado, no es conocido de antemano, está indeterminado. Nuestro interés está en determinar cuál es el resultado o qué acción tomar como consecuencia del mismo. Un médico somete a un enfermo a un cier-

³⁷ M.K. Starr y D. W. Miller, *Fonction de direction et recherche opérationnelle* (Paris 1964).

to tratamiento, ¿se curará dicho enfermo? A la vista del tiempo que hace, ¿llevaré paraguas al salir de casa?

Teorizar acerca de la conducta a seguir en tales situaciones exige construir un modelo formal que resulte de abstraer sus connotaciones más relevantes. Esto exige la introducción del concepto de probabilidad que de algún modo mida la incertidumbre que las rodea.

Así, en el caso del enfermo, un modelo de su situación puede ser el siguiente: hay dos resultados posibles, curar o no curar, a los que podemos asignar las probabilidades respectivas p y $1-p$. Podemos pensar que este paciente representa toda una población de pacientes que sufren la misma enfermedad, en cuyo caso el modelo servirá de norma para dictaminar de cara al futuro. La determinación de p en estas circunstancias puede hacerse en base a la frecuencia de curados en el pasado de dicha enfermedad. Procediendo así, la probabilidad p constituye a su vez un modelo abstracto de las frecuencias.

Pero puede suceder que, por su fisiología o su psicología especial, este enfermo sea considerado por el médico como caso patológico especial y, a pesar de que exista un cierto porcentaje de curados de esa misma enfermedad, el médico asigne a este caso una probabilidad de curación distinta de dicho porcentaje. Al proceder así, el médico ha asignado una probabilidad de curar subjetiva (personal), ha medido sus propias creencias acerca de la curación confiriéndolas un valor numérico. Tenemos así dos modos de asignar probabilidades, a los que se podrían añadir otros, como las probabilidades "clásicas" o de Laplace y la probabilidad "lógica". Estas formulaciones exigen ideas asociadas de independencia, aleatoriedad, etc.

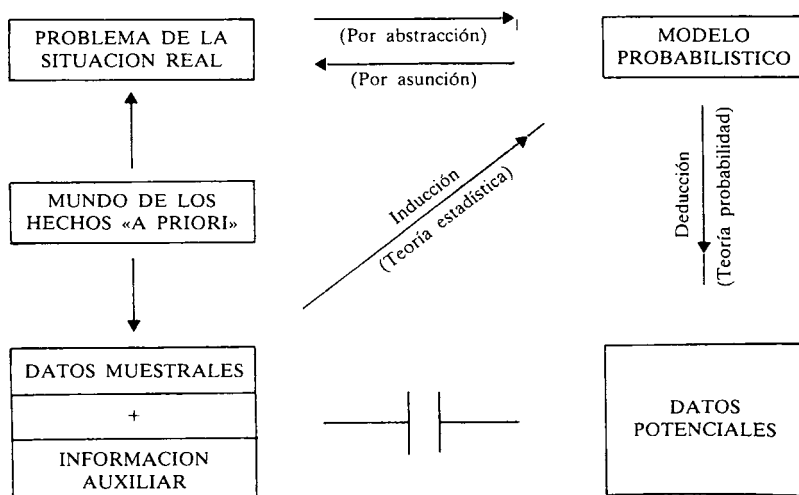
El modelo de la situación real consta esencialmente de un enunciado acerca del conjunto de resultados posibles y de una asunción acerca de sus respectivas probabilidades. Su finalidad es permitir el uso de argumentos lógicos o matemáticos que permitan deducir comportamientos de cara al futuro. Actúa como una idealización de la situación real. La meta de todo buen investigador es construir modelos sencillos que se adapten lo más posible a la realidad.

Pongamos algunos ejemplos de modelos probabilísticos:

a) Se estudia el número de muertes por accidente de tráfico en las poblaciones, en intervalos de un mes. Los accidentes que ocurren en un cierto mes son independientes de los que ocurren en otro mes cualquiera y obedecen al azar. La probabilidad de que una persona muera en accidente es pequeña. Estas hipótesis se amoldan perfectamente a un modelo de Poisson, el cual queda totalmente determinado por un parámetro simple, su media, que es proporcional a la tasa mensual de accidentes.

b) Poseemos las puntuaciones de los alumnos de una asignatura y deseamos, por ejemplo, conocer el percentil correspondiente a un alumno que ha sacado una nota determinada. En vez de trabajar con todas las puntuaciones (que pueden ser muchas), podemos suponer que éstas siguen una *distribución normal*. El modelo normal está completamente determinado por la media y desviación típica. Obtenidas estas características, con respecto a todas las puntuaciones, la “tabla” del modelo normal resuelve el problema planteado. c) La situación real puede ser el indagar el número de varones de una población valenciana de 20.000 habitantes. Se sabe por los boletines de nacimiento que la probabilidad de nacer varón es 0,517 en la provincia de Valencia. Hay dos estados posibles, ser varón o ser hembra, ambas posibilidades son aleatorias, incompatibles e independientes. Luego la situación definida obedece a un *modelo binomial* de parámetros $n = 20.000$ y $p = 0,517$. El valor esperado sabemos que es np ; en este caso, $20.000 \times 0,517 = 10.340$ varones.

3. El modelo incorpora a la situación real una estructura con escasos elementos desconocidos, los *parámetros*: la media en el ejemplo a), la media y la varianza en el ejemplo b) y el número de individuos y la probabilidad de ocurrencia para cada uno, en el caso c). El modelo probabilístico es pieza fundamental en los dos principales argumentos estadísticos, la *deducción progresiva* y la *reducción regresiva* o inferencia estadística propiamente dicha. Ambos procesos están esquematizados en la figura.



i) El problema de la situación real es una parte del mundo de los hechos. Por *abstracción*, a partir del problema real se construye el modelo, y de éste, por *deducción*, se generan propiedades probabilísticas de los datos que suministra la situación real, en el supuesto, claro está, de que el modelo se ajusta a la situación real. En este proceso la probabilidad actúa como "canal de información", esto es, como "lenguaje" que liga el modelo con los datos potenciales. En los tres ejemplos anteriores la información generada por el modelo ha servido para resolver cuestiones planteadas en la situación real.

ii) La inferencia estadística invierte este proceso. Se inicia con los datos muestrales obtenidos del mundo de los hechos, de la misma naturaleza que aquellos que constituyen la situación real obtenidos mediante un diseño adecuado de experimentos o quizá fortuitamente, y luego utiliza estos datos, y toda otra información, para validar un modelo especificado, para hacer "conjeturas racionales" o "estimar parámetros", o aún para originar un modelo. Todo esto es objeto de la inferencia estadística. Este proceso inverso, *inductivo*, es posible gracias al "lenguaje" de la teoría de la probabilidad, dispuesto de antemano para formar el eslabón *deductivo*. Su finalidad es facilitar la

obtención de inferencias a través de la información suministrada por la muestra (y, si es el caso, por otras fuentes informativas relevantes que contribuyan a una inferencia más precisa) o construir procesos que ayuden a tomar adecuadas decisiones en la situación práctica.

4.4.2. La información estadística

I. La información es elemento característico del método estadístico: del hecho aislado no puede extraerse ninguna conclusión en situaciones de incertidumbre, esto es, en las que interviene el azar; al examinar un conjunto o colectivo de casos concretos se aprecia una cierta regularidad o estabilidad en el comportamiento de dichos fenómenos. Por eso se dice que no hay estadística sin observación o experimentación.

En los tres ejemplos a), b) y c), citados anteriormente, la información tomaba la forma específica de “realizaciones” de una situación práctica: muertes habidas por accidente, puntuaciones obtenidas por alumnos, número de varones nacidos en una población. Estas realizaciones se suponen obtenidas como repetición de la situación bajo idénticas circunstancias. A este tipo de información se le suele llamar “datos muestrales”.

Para algunos autores como von Mises³⁸, Venn³⁹, Reichenbach⁴⁰ y Bartlett⁴¹, sólo con información de este tipo, obtenida en situación repetitiva, a lo menos potencialmente, se puede definir adecuadamente el concepto de probabilidad. Es la llamada interpretación frecuentista o frecuencialista de la probabilidad.

Limitamos nuestro propósito, hablando “grosso modo” -dice Von Mises (op. cit., p.1)- a una teoría matemática de sucesos repetitivos. Y más tarde (pp. 13 y 14) añade: Si se habla de la probabilidad de que dos poemas conocidos como la Ilíada y la Odisea tengan el mismo autor, no es posible referirse a una sucesión prolongada de

³⁸ R. von Mises, *Mathematical theory of probability and statistics* (New York 1964).

³⁹ J. Venn, *The logic of chance* (Londres 1886).

⁴⁰ H. Reichenbach, *The theory of probability* (Los Angeles 1949).

⁴¹ Op. cit.

casos, y difícilmente tendrá sentido asignar un valor numérico a tal conjetura.

Los datos muestrales, evaluados de acuerdo con el concepto frecuencialista de la probabilidad, constituyen la base de la llamada estadística clásica, esto es, la estadística según los cánones de Fisher, Neyman y Pearson.

2. En el ejemplo c) la información utilizada, proporción de varones, es de naturaleza frecuencial por su forma repetitiva. Pero cuando hemos afirmado que en Valencia esta proporción es de 51,7 por cada cien nacidos, no nos hemos referido a ningún experimento u observación particular, sino que es algo que los estadísticos profesionales dan como valor medio de cálculos llevados a cabo tras observaciones seculares de los boletines de nacimientos remitidos por los registros de población. Se trata, pues, de una información obtenida por experiencia anterior.

Una empresa que se dedica a construir aviones recibe un día una oferta de un tipo de material por parte de uno de sus abastecedores y que, según él, es el más adecuado por sus cualidades de ligereza, resistencia, etc., para el nuevo modelo que se proyecta. Los técnicos de la empresa experimentan con el nuevo material (datos muestrales), pero tienen también en cuenta los datos suministrados por el proveedor (experiencia pasada), el cual los resultados del material que ofrece en otros proyectos de otras empresas. Por otra parte, el equipo económico, de acuerdo con el técnico, hará las valoraciones de todo tipo que se desprenden de la adopción del nuevo material: perjuicios causados si no se cumplen las especificaciones exigidas por el mercado, diferencias en los costes, comercialización, etc. (*información sobre las consecuencias potenciales*).

Vemos a través de estos ejemplos que la información necesaria para resolver un problema estadístico (que concluirá en muchos casos en un problema de decisión) puede abarcar información de tres categorías distintas: información debida a experiencia anterior (información inicial del sujeto que puede basarse en hechos ob-

jetivos observados con anterioridad, o ser meramente subjetiva), datos muestrales (debidos a observación o experimentación actual) y consecuencias potenciales (información nacida e las posibles consecuencias que traería consigo una u otra acción).

Estas diversas categorías de información pueden resumirse en dos: una que posee ya el sujeto y que llamaremos información a priori (no importa cuál sea su naturaleza y origen), y otra suministrada por la muestra o información muestral. La combinación de ambas constituye la esencia de la inferencia estadística bayesiana. El uso exclusivo de la segunda es típico de la estadística clásica. La información sobre las consecuencias es, en cambio, relevante en la teoría de la decisión.

4.4.3. Valoración y decisión

Los datos numéricos de la estadística resultan de asignar números a objetos o relaciones empíricas de acuerdo con ciertas reglas fijas.

Estas reglas dan lugar a las *escalas de medida*. Las escalas de medida son posibles sólo en tanto existe un cierto isomorfismo entre las operaciones que podemos hacer con los números y las que podemos hacer con los objetos empíricos. Los modos según los cuales las propiedades y las operaciones efectuadas con los números son trasladables a los objetos empíricos dan lugar a otros tantos tipos de medidas y escalas.

Las propiedades de los números trasladables a los objetos son, principalmente, la igualdad y desigualdad, conexión u orden, igualdad de diferencias e igualdad de razones. Estos tipos de operaciones dan origen a cuatro clases de escalas: escalas enumerativas o *nominales*, escalas *ordinales*, escalas de *intervalos* y escalas de *razón*. La descripción de cada una puede verse en Gutiérrez Cabria⁴².

Con cualquiera de estas cuatro escalas, aplicadas a los conjuntos de objetos, se obtienen conjuntos numéricos, pero la información su-

⁴² Op. Cit.

ministrada se va haciendo más y más precisa a medida que utilizamos escalas más perfectas. Es evidente que, en la ordenación establecida, la más imperfecta es la escala nominal y la más perfecta la basada en la igualdad de razón.

En los párrafos anteriores nos hemos referido a inferencia estadística y a teoría de la decisión como conceptos distintos, pero con elementos comunes. A la inferencia estadística le asignamos la misión de describir la situación real y a la teoría de la decisión le pedimos que prescriba primera acción a ejercer en la situación dada.

La información sobre las posibles consecuencias está inmersa en el problema de la valoración de esas consecuencias, el cual es vital, ya que es determinante a la hora de tomar decisiones. Esta valoración debe ser cuantificada de algún modo a fin de poder comparar los resultados de distintos cursos de acción. La valoración de las consecuencias y su formal cuantificación es objeto de la *teoría de la utilidad*. Esta teoría forma parte de las diversas interpretaciones de la estadística y constituye uno de los elementos básicos de la teoría de la decisión.

Lo mismo que los datos muestrales, la valoración de las consecuencias puede ser objetiva: los costes de manufacturas debidos a procesos distintos pueden ser valorados en moneda de cuenta. Pero puede suceder que las consecuencias que se desprenden de la toma de decisiones distintas no sean susceptibles de una valoración objetiva. ¿Cómo valorar objetivamente los resultados de elegir entre el cumplimiento de la ley y el cohecho? ¿Cómo ser objetivo a la hora de elegir como mujer a Juana o a María? Aun en situaciones aparentemente objetivas es difícil eludir todo factor personal. En la elección de uno u otro material, aparte de componentes objetivos perfectamente comparables en precio, calidad, etc., siempre intervendrán el gusto del decisor, las modas en el consumo, la presión social, etc. En la esfera de las actividades humanas es a menudo difícil ser objetivo. La valoración de consecuencias implica entonces evaluar juicios subjetivos (personales), acudiendo a los instrumentos de la teoría de la utilidad.

Todos sabemos lo que pesa, por encima de todas las características técnicas y el precio, las preferencias y gustos de la mujer a la hora de elegir el marido un nuevo modelo de automóvil.

4.5. La estadística y el método científico

1. Diariamente cada uno de nosotros lleva a cabo alguna observación con finalidad estadística. La parte más elemental de la estadística hace su aparición en cuanto se realiza mentalmente la evaluación de una observación cualquiera. Cuando uno se pesa, automáticamente compara el peso obtenido con el promedio de pesadas anteriores y considera si este peso se desvía significativamente del comúnmente observado.

Estos resultados sencillos se obtienen con facilidad; pero cuando se emprende una investigación en serio, el método estadístico, que es el compañero inseparable de toda investigación científica, exige especiales conocimientos. En general se apela a la estadística siempre que acaecen sucesos en fenómenos de colectivo. Estos sucesos son de dos tipos; en unos, el estadístico es mero observador de lo que sucede; tal ocurre con la observación de los hechos demográficos como nacimientos, matrimonios, defunciones, etc. Es lo que hacen también los astrónomos, sin que en ningún caso pueda el observador modificar los fenómenos que tenía ante sí.

Otras veces los sucesos son el resultado de una experiencia provocada por el investigador, bajo ciertas condiciones. La experiencia puede provenir de las ciencias llamadas experimentales o de las socioeconómicas; puede obtenerse en un laboratorio o en la vida real, puede ser libre o controlada.

Lo corriente es que una experiencia no sea exactamente repetible en cuanto a resultados se refiere, cuando las condiciones que la definen no son totalmente controlables; en estos casos los resultados no son predecibles. Se habla entonces de experiencia de azar o experimento aleatorio o estocástico, por oposición a aquél en que hay relación de causa a efecto, llamado determinista. Son experiencias

aleatorias la extracción de una carta de un mazo, el lanzamiento de un dado para obtener una de sus caras, la elección de un punto sobre una diana mediante un disparo sobre ella.

Desde el punto de vista estadístico todos los hechos observados, tanto si provienen de un fenómeno experimental como si resultan de la simple observación del mundo que nos rodea, tienen el mismo carácter de estabilidad.

Pero es preciso tener en cuenta que a veces puede desviarse el fenómeno de esa regularidad, debido a la variabilidad exhibida por todo tipo de agrupación o clase. Así, al observar la población habrá que considerar la variación por edades, por sexo, por regiones de origen. Habrá que tener en cuenta la variabilidad de un mismo fenómeno en el tiempo: la tasa de mortalidad cambia por el progreso de la medicina, el número de accidentes con el desarrollo económico.

2. Ciertas ciencias empíricas, como la psicología, admiten, según algunos investigadores, como método de investigación la introspección. Esto es una excepción; en la mayoría de las ciencias de la naturaleza la observación es exclusivamente sensible y externa. En el caso más corriente los datos se obtienen por experimentación.

Existe una evidente analogía entre experimentación y comunicación a través de un canal ruidoso. Las entradas son los estados de la naturaleza, y las respuestas, los resultados del experimento. La información transmitida mide el promedio de incertidumbre que queda eliminada por el experimento acerca de los estados de la naturaleza. Será ejecutado aquel experimento con mayor información esperada. El proceso es el de la llamada "caja negra", según el esquema de la figura 1.

Algunos autores, como D. A. S. Fraser⁴³, llaman sistema aleatorio al concepto aquí reseñado, y reservan la palabra experimento para investigaciones en las que las entradas están controladas por existir alguna relación de causa a efecto. El control de las entradas puede ser de dos clases: entradas diseñadas o planificadas, de suerte que

⁴³ D. A. S. Fraser, *Inference and linear models*, (Londres 1979).

la modificación de una, dejando fijas las demás, permita detectar su influencia en las respuestas: tenemos entonces lo que se conoce con el nombre de diseño de experimentos; pero puede suceder que las entradas no sean directamente controlables y se haga su elección aleatoriamente, en cuyo caso se origina un efecto aleatorio sobre las respuestas. La aleatorización externa de las entradas, ante diversas realizaciones del experimento, provee de una cierta compensación de la falta de control de dichas entradas. Esta aleatorización externa es una componente de la investigación que determina la aleatoriedad del experimento o sistema.

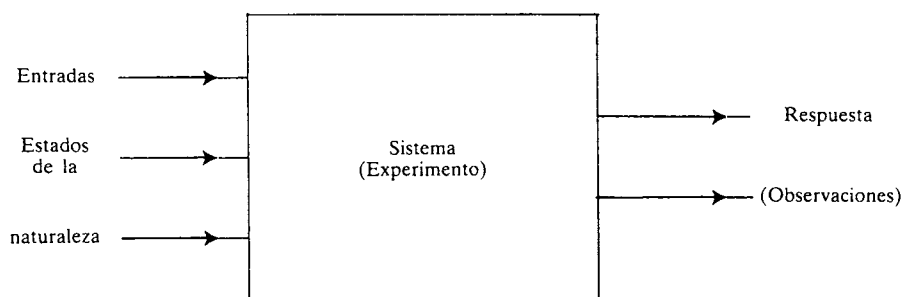


Fig. 1

3. La recogida de datos es la primera fase del proceso estadístico. Estos datos proceden de lo que en el esquema descrito llamamos mundo de los hechos a priori. De estos hechos tomamos los que convienen al problema real que nos ocupa y que servirán para construir el modelo de ese problema. Esa información incorporada por el científico a su ciencia, a la teoría científica que pretende construir, son las llamadas observaciones científicas (llamadas también protocolarias).

Tras su análisis, el científico procede a la formulación de los enunciados universales sintéticos.

La inferencia estadística interviene en las fases que culminan con la obtención de modelos de las teorías científicas. Hemos recalcado ya que la ciencia progresa no por meras especulaciones teóricas, sino por una feliz simbiosis entre la teoría y la práctica, suficientemente

iteradas. En esta iteración de la teoría y la práctica, nuevos datos sugieren nuevos modelos teóricos, y un nuevo modelo propuesto inspira nuevos exámenes y análisis de los datos obtenidos o que deben adquirirse. La dualidad de los procesos de inducción y deducción conduce así a mejorar los modelos paulatinamente, con ayuda del método estadístico.

La presencia de la estadística se manifiesta en un doble proceso que pudiéramos denominar de depuración y estimación del modelo científico. Este doble proceso constituye la fase *inferencial* que atañe al estadístico, a la cual precede otra, *preinferencial*, que compete al científico. Karl Popper⁴⁴ describe así ambas fases del método científico: *El científico teórico propone ciertas cuestiones determinadas al experimentador, y este último, con sus experimentos, trata de dar una respuesta decisiva a ellas, pero no a otras cuestiones: hace cuanto puede por eliminar éstas.*

De los hechos “a priori”, que reflejan los verdaderos estados de la naturaleza, por vía reductiva o directamente, el científico formula sus hipótesis o leyes, su modelo, M_i . El estadístico consulta nuevamente a la naturaleza, la misma que inspiró al científico su modelo, extrayendo nuevos datos con los que realiza el diseño D_i , y los cuales confronta al modelo M_i . Los datos utilizados para esta confrontación del modelo han de ser distintos de los que sirvieron para su construcción (lo que implica una dicotomización de los hechos “a priori”), pues, de lo contrario, se incurrirá en un círculo vicioso. Los nuevos datos estarán de acuerdo o en desacuerdo con M_i . Es éste un proceso de diagnóstico. En caso de existir desacuerdo, cabe preguntarse por qué. Los instrumentos estadísticos utilizados para este análisis son los diversos tests de la bondad de un ajuste, análisis de la varianza residual, etc. Puede suceder que sea aconsejable cambiar M_i por un nuevo modelo M_{i+1} , que será sometido a la prueba de los mismos datos obtenidos o a la de otros nuevos, si así lo exige la independencia de la prueba, para lo que se diseñaría un nuevo experimento de D_{i+1} (Figura 2).

⁴⁴ K. Popper, *La lógica de la investigación científica* (Madrid 1967).

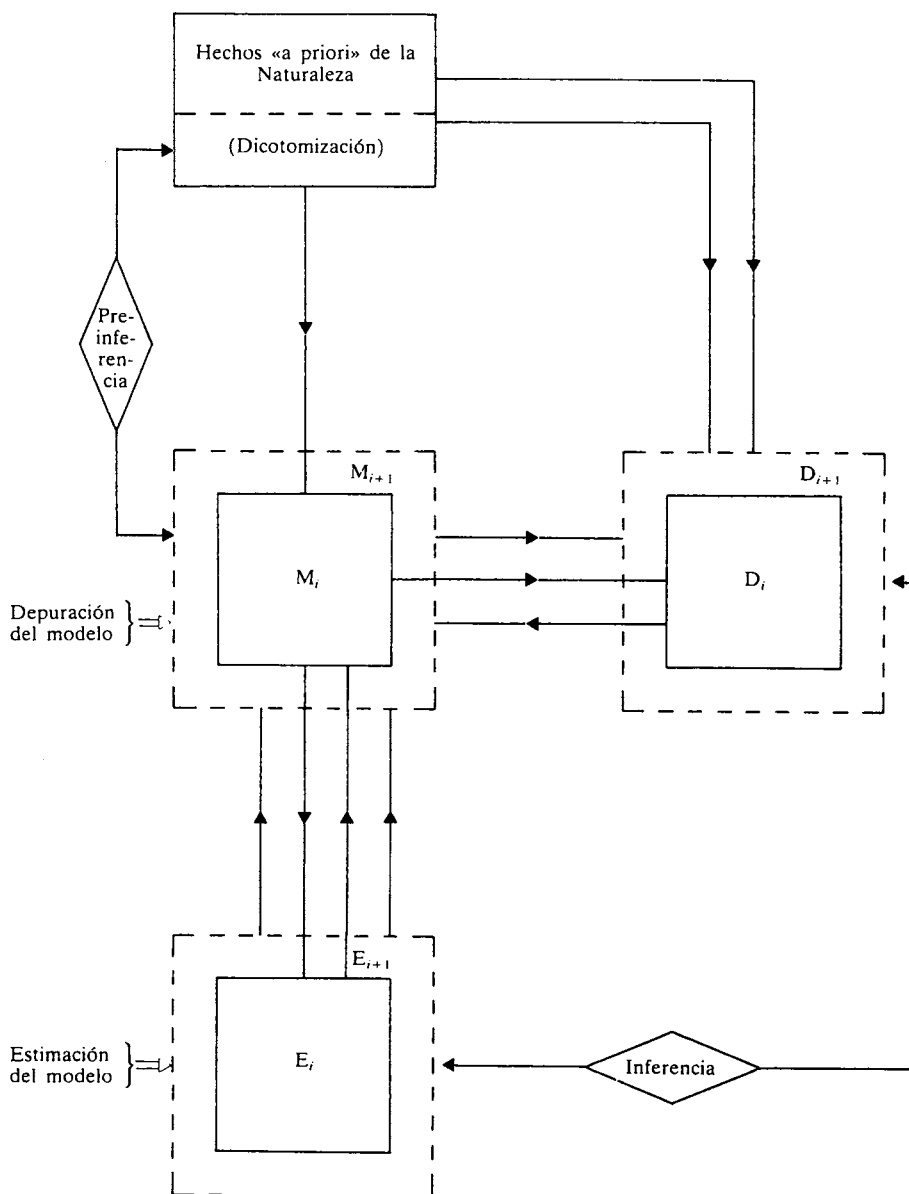


Fig. 2

Caso de haber llegado a la obtención de un modelo aceptable, esto es, aproximado suficientemente a la realidad que ha servido de verificación o contraste, puede procederse a estimar sus parámetros, en base a esa misma realidad con la que se ha verificado que está conforme. En realidad, esta estimación es necesaria en cada prueba de depuración del modelo provisional, pues es el único modo de ver si se aproxima o no a los hechos reales.

Así como las técnicas estadísticas utilizadas en la depuración del modelo pertenecen a la escuela clásica, el problema de la estimación puede hacerse por métodos clásicos o bayesianos, fiduciales o estructurales, todo lo cual pone de manifiesto la complementariedad de las escuelas y, en su caso, la subsidiariedad, como habíamos anunciado al principio.

4.6. El Análisis de Datos

4.6.1. Introducción

Como hemos indicado ya, a grandes rasgos, antes del 1900 la estadística se limitaba a lo que hoy llamamos *estadística descriptiva*. Las exploraciones que llevaba a cabo se ceñían al análisis descriptivo de datos, con las especificaciones señaladas. A pesar de sus limitaciones, este análisis hizo importantes aportaciones al campo de la ciencia. Luego, apareció el *análisis inferencial de datos*, que Karl Pearson intentó relacionar con el anterior mediante el test de la X^2 . Este análisis empezó siendo clásico y luego incorporó la aportación bayesiana.

Más tarde los grandes avances del cálculo de probabilidades llevaron a la creación de la *estadística teórica*, que desarrolló los grandes modelos matemáticos de la estadística, como hemos visto también. La estadística se alejó más y más de la idea primitiva de los *aritméticos políticos*⁴⁵. En los años 60 la mayor parte de los textos de

⁴⁵ En 1660 encontramos la palabra *estadística* en el curso que Herman Conring imparte en la universidad de Helmstedt, con el título *Staatskunde*. Surge entonces la *aritmética política* de la escuela alemana con Conring y sus discípulos Schmeitzel y Achenwal, continuada luego por la escuela inglesa encabezada por Graunt y Petty. Con la aritmética política se abandona la descripción para orientarse hacia la recogida y análisis de datos exclusivamente numéricos, observados con fines específicos, y en base a los cuales se hacen estimaciones por medio de conjeturas. Aunque ausente

estadística se ocupaban, casi exclusivamente, de los modelos clásicos o bayesianos de la estadística con respecto a un conjunto simple de datos. Esta tendencia a la matematización de la estadística condujo a que en la enseñanza fueran descuidados los aspectos prácticos del *análisis de datos*.

A lo largo de su historia la estadística ha evolucionado constantemente, acomodándose a las modas y necesidades de los tiempos, y principalmente a las exigencias de la investigación científica. El uso creciente de la estadística en campos aplicados del saber, sobre todo con la irrupción de la informática, en todas las actividades de la ciencia y de la administración, había de producir la natural reacción ante tanta matematización de la estadística, lejana muchas veces de los problemas reales. Otro hecho que ha modificado los procedimientos en los trabajos estadísticos, es la posibilidad actual de manejar grandes cantidades de datos, lo que, en muchos casos, permite prescindir de los estudios muestrales.

Como consecuencia de estas circunstancias, durante las cinco últimas décadas se ha desarrollado toda una serie de tipos de *análisis de datos* que se sitúan, en el caso más general, entre la estadística descriptiva y la estadística teórica, y a veces fuera mismo del dominio de la estadística.

Entre estos tipos de análisis están el *análisis exploratorio de datos* de Tukey, el *análisis inicial de datos* de Chatfield y el *examen cruzado de datos* de Rao ("Cross Examination of Data", CED). Previamente a estos estudios especializados, diremos algo del análisis inferencial de datos.

4.6.2. Análisis inferencial de datos

Karl Pearson utilizó el *análisis descriptivo de datos*, basado en los *momentos*, distribuciones frecuenciales, histogramas, etc., para extraer *inferencias* acerca de una familia de distribuciones probabilísticas. Surgieron así los distintos *modelos estadísticos* y la necesidad

aún la probabilidad en estas predicciones, se observan ya, en la aritmética política, los elementos básicos del método estadístico.

de desarrollar métodos generales para estimar sus parámetros y especificar las familias de distribuciones.

El análisis inferencial de datos cae plenamente en el ámbito de la explicación y predicción estadísticas e implica la modelización estadística. Utiliza tanto la deducción como la inducción estadísticas.

Históricamente, los fundamentos del análisis inferencial de datos fueron asentados en un artículo de **Ronald Fisher**⁴⁶, en el que se formulan los principios del análisis inferencial mediante un modelo estocástico específico. En los años 20 y 30, el propio Fisher introduce el análisis de *planes factoriales de diseño de experimentos* con el uso del análisis de la varianza. Se estableció con estos planes una acción recíproca entre análisis y diseño: el análisis dictaba un tipo de diseño, y recíprocamente. Estos análisis encontraron gran eco en las investigaciones agronómicas.

En los años 40 tuvo gran desarrollo el análisis por muestreo. Esto condujo a la obtención de grandes masas de datos y al estudio de la *fiabilidad, precisión, sesgo, etc.*, de los resultados obtenidos. Llevó también a la comparación de procedimientos y tipos de investigación, y al tratamiento de los *errores observados*, principalmente de los datos espurios o aberrantes (*outliers*).

4.6.3. Análisis exploratorio de datos

Tukey⁴⁷ y Mosteller y Tukey⁴⁸ desarrollaron lo que hoy se conoce como *análisis exploratorio de datos*. **Tukey**, en el primero de estos trabajos escribe:

*En el análisis de datos incluyo, entre otras cosas: procedimientos para **analizar** datos, técnicas para **interpretar** los resultados de tales procedimientos, modos de **planificar** la recogida de datos a fin de facilitar su análisis y hacerle más preciso y más afinado, y toda*

⁴⁶ R. A. Fisher, *On the mathematical foundations of theoretical statistics*. Phil. Trans., A, 222, 309-368, 1922.

⁴⁷ J.W. Tukey, *The future of data analysis*. Ann. Math. Statist. 30, 1-67.

⁴⁸ F. Mosteller y J.W. Tukey, *Data analysis and regression*. Reading, mass. Addison-Wesley, 1968.

la maquinaria y resultados de la estadística matemática aplicable al análisis de datos.

La filosofía que inspira el análisis exploratorio de datos consiste en comprender las especiales características que encierran los datos y emplear métodos robustos para acomodar a los datos una posible clase de modelos estocásticos. Según esta filosofía son los modelos los que han de elegirse de acuerdo con los datos que se tienen, con sus características propias, en vez de proceder a la elección de datos para un apropiado modelo.

El nombre de análisis exploratorio alude a que se ha de realizar un análisis preliminar de los datos para examinar su comportamiento, como fase previa a la elección del modelo. Continúa Tukey así:

*Amplias partes del análisis de datos son **indagatorias**, exponiendo sencillas indicaciones que no podrían percibirse por simple y directo examen del conjunto bruto de datos, pero esto es sólo parte, no el todo [...]. Grandes partes del análisis de datos son **inferenciales** en el sentido de ir de la muestra a la población, pero éstas son sólo partes, no el todo⁴⁹.*

Mas adelante sigue Tukey precisando el concepto y la demarcación del análisis exploratorio de datos:

Algunas partes del análisis de datos, como el término es entendido aquí, más allá de su filología, son la asignación, en el sentido que nos guía, del esfuerzo y otras consideraciones evaluables en la observación, experimentación o análisis. El análisis de datos tiene un campo más amplio y más variado que la inferencia, o los procedimientos indagatorios, o la asignación⁵⁰.

En el análisis exploratorio de datos pueden distinguirse dos fases: la *exploratoria* y la *confirmatoria*. La primera se refiere al análisis preliminar del que acabamos de hablar: un primer contacto con los datos, que antecede a la elección de modelos; este estudio preliminar indaga posibles desviaciones de los modelos respecto a los datos.

⁴⁹ Op. cit.

⁵⁰ Ibid.

La fase confirmatoria está más próxima a la función de la inferencia estadística tradicional, dando a los enunciados *significación y grados de confianza*; esta fase compagina también la incorporación de la información de un tipo de análisis al otro; relaciona estrechamente con el cuerpo de datos la *validación* de un resultado mediante nuevos datos.

El análisis exploratorio de datos concede especial importancia a las siguientes características del análisis de datos. *Resistencia al cambio* en lo resúmenes o resultados de los análisis ante pequeñas variaciones en los datos (unos datos consistentes no conducen a variaciones superiores al 5 por ciento). Esta propiedad es distinta de la *robustez*, que implica insensibilidad general a las desviaciones respecto a las asunciones sobre el modelo básico. Así, la *mediana* es altamente resistente para situar la muestra respecto al modelo, pero no es robusta, pues hay otros estadísticos más estables, con respecto a la variación dentro de la gama de distribuciones; tal sucede con la *media* que, en cambio, no es resistente.

Un análisis exploratorio no es completo sin un examen de los *residuos*. Los residuos resultan de las discrepancias entre los datos y los valores ajustados. Ponen de manifiesto la diferencia entre la conducta expresada por los datos y el comportamiento dominante.

A veces es conveniente expresar de modo distinto los datos. Un cambio de escala, una transformación afín de los datos, puede ser de gran ayuda para su análisis.

Finalmente, procede *mostrar* los resultados del análisis de datos, a fin de examinar el comportamiento de los mismos: ajustes, medidas de diagnóstico y residuos.

Tukey critica algunos hábitos en los análisis puramente estadísticos, tendentes a una *objetivación* excesiva de las conclusiones. Escribe⁵¹:

Dejando a un lado faltas prácticas de ética, uno de los modos más peligrosos de practicar el análisis de datos es el uso de procedimientos

⁵¹ Ibid.

formales de análisis para santificarlos, preservando las conclusiones de toda crítica, mediante el aval de un imprimatur. Mientras los estadísticos han contribuido a este mal uso en general, la cuota de cada uno ha sido pequeña. Existe el correspondiente peligro en el análisis de datos, especialmente en sus aspectos estadísticos. La visión que se tiene es la que resultaría si todos los estadísticos trataran a un conjunto de datos de idéntico modo, algo así como si todos los almirantes ingleses maniobraran siguiendo los mismos principios en los días de navegación. Los almirantes no se podrían comunicar unos con otros, y una sencilla doctrina básica sería esencial para una acción coordinada y efectiva. Hoy, los estadísticos pueden comunicarse, y pueden ganar más utilizando conocimiento especial (de naturaleza subjetiva o metodológica) y flexibilidad de ataque, que lo que pueden perder portándose todos de igual modo.

Tukey se muestra contrario a la visión de la estadística como “una estructura monolítica y autoritaria orientada a la obtención de resultados oficiales” y considera que esta dirección es peligrosa para el análisis de datos. Dentro de esta filosofía está esta confesión: *Mejor es una respuesta aproximada a una cuestión correcta, la cual es a menudo vaga, que una respuesta exacta a una cuestión equivocada, la cual puede hacerse siempre más precisa*⁵². Según esto, el análisis de datos debe progresar mediante respuestas aproximadas ya que el conocimiento de lo que es realmente el problema será, en el mejor de los casos, aproximado. Sería un error renunciar al uso del conocimiento aproximado y cerrar los ojos a la posibilidad de que en cada instancia particular nuestro conocimiento suele ser incompleto.

4.6.4. Análisis inicial de datos

El *análisis inicial de datos* o *examen inicial de datos* es propuesto por Chatfield⁵³. La idea consiste en que *ha de empezarse con un*

⁵² Ibid.

⁵³ C. Chatfield, *The initial examination of data*, J.R. Statist. Soc., A, 148, Part. e, pp. 214-253, 1985.

*análisis informal, una mirada exploratoria a los datos dados, a fin de obtener una percepción de ellos*⁵⁴.

Según confiesa el propio Chatfield, no es posible dar una definición del análisis inicial de datos, pues lleva consigo un conjunto informal de un área amplia de actividades, y cada estadístico tiene sus preferencias sobre el uso de unas u otras de esas actividades. El campo del análisis inicial de datos se extiende al estudio sobre datos *cualitativos* y al propio de la *estadística descriptiva*, así como a varias técnicas analíticas de datos y a lo que Chatfield denomina *uso informal* de métodos inferenciales.

Los dos principales objetivos de este tipo de análisis son la *descripción de datos* y la *formulación de modelos*. El primero de estos dos objetivos colma las aspiraciones del análisis inicial de datos cuando se aplica a toda la población, o cuando la muestra es muy grande, o cuando la calidad de los datos es demasiado pobre para poder ajustar métodos inferenciales. Un análisis inicial de datos puede ser suficiente cuando se trata de comparar resultados nuevos con los antiguos. Mientras los procedimientos inferenciales se utilizarían primariamente en muestras aleatorias, el análisis inicial de datos se sumaría al estudio de datos poco consistentes y al análisis de algunos conjuntos de datos obtenidos de modo opinático o constituidos por pocos elementos. Llevado a cabo un análisis inicial de datos, los propios resultados indicarán si es o no es deseable o necesario llevar a cabo un proceso inferencial. Los distintos aspectos o *fases* que presenta el análisis inicial de datos pueden sintetizarse como sigue.

a) Escrutinio de datos. El analista empezaría un análisis inicial de datos valorando la *estructura y calidad* de los datos. En cuanto a la estructura, el análisis dependerá crucialmente, no sólo del número de observaciones, sino también del número y tipo de variables. Hay que escrutar cómo se han recogido los datos, posibles errores, desviaciones espúrias o aberrantes, consistencia, credibilidad y completitud. Un ordenador puede ser programado para detectar

⁵⁴ Op. cit.

estas características, y el ojo humano también puede ayudar a ver anomalías en los datos, si estos están debidamente ordenados en tablas, gráficos, etc.

b) Manejo de datos multivariantes. Las compilaciones y resúmenes de estos datos deben ser suplementadas por estudios de *correlación*. Las clásicas representaciones en cuadros de doble o triple entrada no son aplicables a más dimensiones. El análisis inicial de datos acude entonces a otras técnicas de análisis, como *análisis de componentes principales*, muchas formas de *análisis de conglomerados ("cluster")*, *"multidimensional scaling"* y *análisis de correspondencias*. Se utilizan estas técnicas desprovistas en general de los modelos probabilísticos formales a que puedan dar lugar. Son más sofisticadas que las técnicas descriptivas de datos corrientes.

c) Uso informal de métodos inferenciales. El análisis inicial de datos puede incluir también el uso informal de métodos que suelen catalogarse como de inferencia clásica. Muchas veces se usan estos métodos con fines más bien exploratorios para mejor entender los datos y lograr ideas nuevas. Tal ocurre con los *tests de significación* o con el *análisis de correlación múltiple o parcial*. A veces se sabe que las conclusiones no son válidas, pero se quiere hallar alguna información acerca del problema o alguna guía para buscar nuevos enfoques.

d) Formulación de modelos. El análisis inicial de datos está principalmente interesado en dar al analista una pintura de las características más importantes de los datos y en *generar hipótesis*. Los modelos que formula están basados en el mismo análisis inicial de datos, aparte de los que tienen bases teóricas *a priori*. Los modelos totalmente empíricos son raros y los más son *a priori*, pero el análisis inicial de datos es crucial en la elección de las asunciones primarias y secundarias. Así, en la *regresión*, una nube de puntos indica la forma de la línea (recta, cuadrática, etc.), y guía acerca de las asunciones secundarias (normalidad, homocedasticidad, etc.). Análogamente, en el análisis de *series temporales*, un diagrama de las observaciones

a lo largo del tiempo puede poner de manifiesto la estacionalidad de la serie, los ciclos y las observaciones espúrias o aberrantes. El diseño puede completarse con otros indicadores más técnicos, como correlogramas, análisis espectral, etc., pero el análisis inicial de datos es esencial prerequisite para la construcción del modelo.

El análisis inicial de datos puede ser también muy útil como elemento preliminar en la elaboración de muchos *tests de significación*. Puede indicar si el test planificado es innecesario. Esto ocurrirá si los datos son claramente significativos o no significativos, cuando las diferencias en la significación no son de interés relevante, o cuando se observa en los datos falta de aleatoriedad o algún tipo de dependencia en cuyos casos el test carece de sentido. Estos hallazgos son de gran ayuda en la formulación de modelos.

La formulación de un modelo preliminar basado en el análisis inicial de datos es el primer paso en el círculo cerrado *formulación-reproducción* en la construcción de modelos.

En comparación con el análisis exploratorio de datos, el análisis inicial de datos está más integrado en los dominios de la estadística: se ocupa más de los procedimientos de recogida de datos, del uso de *estadísticos* para la reducción de datos y de la formulación de modelos. El análisis inicial de datos es una cierta ampliación del análisis descriptivo de datos sumada a una inferencia basada en el sentido común y en la experiencia, con uso limitado de la metodología tradicional estadística. Requiere a veces acudir a simple *análisis subjetivo*, a pensamiento ajeno, pero con conocimiento del problema en cuestión y hasta a la improvisación ingeniosa. Esto no ha de escandalizar, ya que todas las técnicas estadísticas, aun las más sofisticadas, están subordinadas a algún tipo de juicio subjetivo. El exceso de automatización en los procedimientos puede dar al usuario una falsa sensación de seguridad y adormecer o embotar al usuario poco experimentado.

La inferencia, hemos insistido, es complementaria en el análisis inicial de datos. El conocimiento *a priori* puede ser empírico o

información teórica *a priori*, no necesariamente en el sentido de los bayesianos. Todos los modelos que elabora son aproximados y sujetos a posibles modificaciones. En este sentido, las conclusiones a las que llega son inválidas en el sentido de la lógica clásica. El analista debe ser consciente de esta verdad y proceder en consecuencia. Y esto sirve, como norma general, para los modelos contruidos por todos los métodos. Chatfield⁵⁵ da esta receta sobre el uso del análisis inicial de datos:

Yo prefiero generalmente trabajar dentro de la estructura de una clase de modelos de probabilidad, y entonces el análisis inicial de datos puede ser vital en la selección de un buen modelo. Con todo hay ocasiones en las que es fructífero trabajar sin un modelo, particularmente si la calidad de los datos es pobre, y entonces el análisis inicial de datos puede ser más importante aún.

4.6.5. El examen cruzado de datos

Rao⁵⁶ propone un esquema de análisis de datos que comprende dos fases principales: el *examen de datos cruzados* propiamente dicho, que comprende toda exploración o estudio inicial acerca de los datos, y el *análisis inferencial de datos*, que mantiene todos los métodos y procedimientos de la estadística teórica.

El esquema del método aparece desarrollado en el gráfico (Figura 3) y, según Rao, combina el análisis descriptivo de Karl Pearson con el *análisis inferencial de datos* de Fisher, el *análisis exploratorio* de Tukey, y hasta con los *estudios sobre errores* ajenos al muestreo, de Mahalanobis.

Los datos sometidos a examen tienen diverso origen, como consignamos anteriormente: observaciones directas o emanadas de experimentos, conocimiento previo que se posee con anterioridad acerca del fenómeno, o el que se adquiere mediante muestreo. A esto hay que añadir *información priori* sobre el fenómeno, reflejo de una información potencial.

⁵⁵ Op. cit.

⁵⁶ C. R. Rao, *Statistics and truth*, Council of Scientific and Industrial Research (Calcuta 1989).

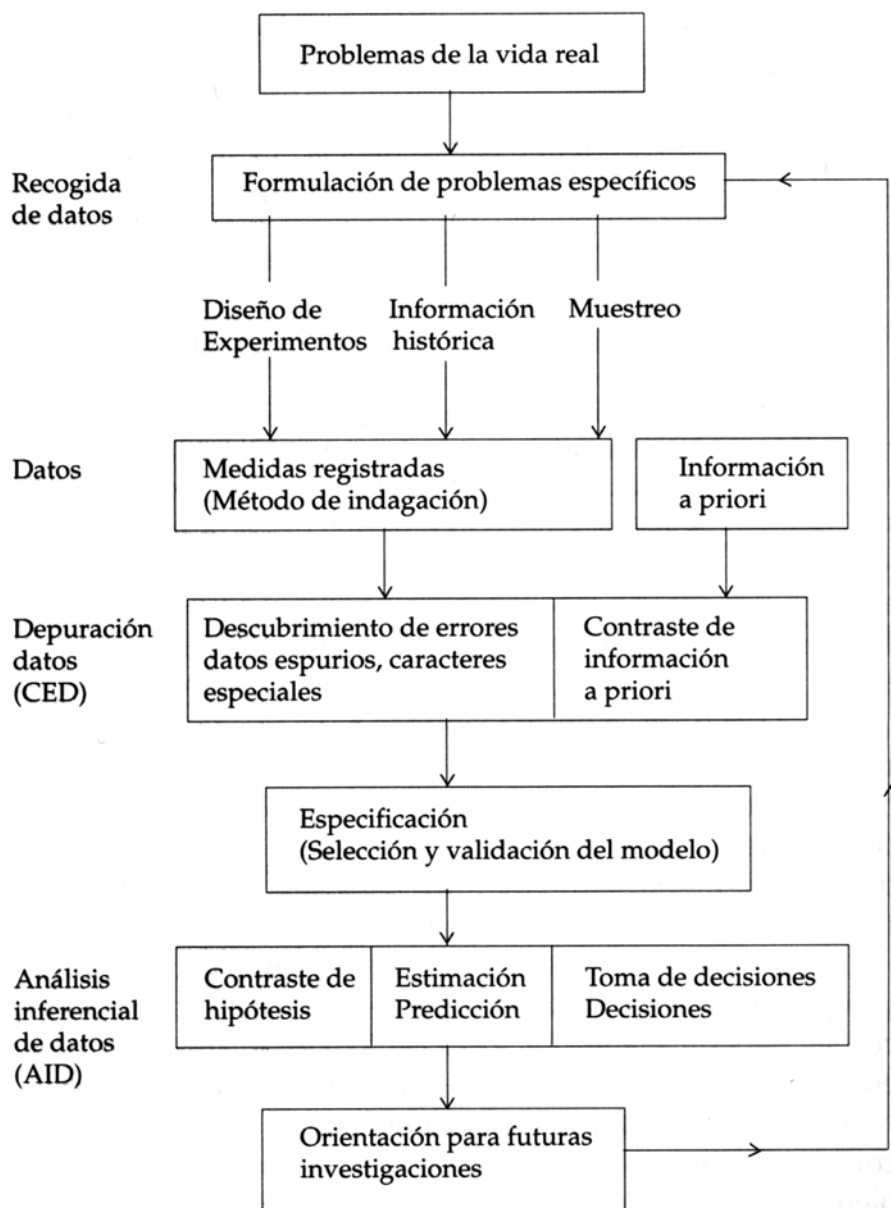


Fig. 3

El *examen cruzado de datos* pretende indagar en los datos registrados, en los que pueden existir defectos tales como errores o datos espurios o aberrantes y datos inventados. La *depuración* de los datos es la primera tarea del estadístico, y no sólo para descubrir fallos, sino para descubrir especiales características que facilitarán la formulación de modelos.

La fase siguiente es precisamente la de *especificación*, que comprende la *construcción* y la *validación* de modelos para los datos, mediante el empleo de la información *a priori* y las técnicas del examen cruzado de datos. Sobre la base de un modelo elegido se lleva a cabo el análisis inferencial de datos, que comprende la *estimación* de los parámetros desconocidos, la *predicción* de futuras observación y la *toma de decisiones*.

El examen de datos, bajo distintos posibles modelos, es sugerido por Rao como más informativo que el uso de procedimientos robustos. En esto la filosofía de Rao coincide con la de Tukey.

Finalmente, el análisis de datos debe también proporcionar información para promover nuevas cuestiones y planificar futuras investigaciones.

Rao enuncia el principal **principio** del análisis de datos con la siguiente ecuación.

Análisis de datos = Respuesta a específicas cuestiones + Provisión de información para nuevas líneas de investigación.

Advierte que la sucesión de *examen cruzado de datos* y *análisis inicial de datos* en el análisis de datos no debe interpretarse como categorías distintas pertenecientes a distintas metodologías. Sólo pone de manifiesto que se debe empezar por lo que concierne a los datos, sus presentaciones en cuanto a los resultados finales y usos en aplicaciones prácticas; luego seguiríamos con *análisis inferenciales*. Algunos resultados de *análisis inferencial de datos* pueden sugerir otros *exámenes cruzados de datos*, los cuales, a su vez, pueden prescribir cambios en el *análisis inicial de datos*.

Algunas pautas para el examen cruzado de datos son sugeridas por Rao en la siguiente relación de preguntas.

i) ¿Cómo son obtenidos y registrados los datos?

ii) ¿Están libres los datos de errores de medida y de errores de observación y registro? ¿Están los conceptos y definiciones en correspondencia con medidas bien definidas? ¿Existen diferencias entre distintos observadores?

iii) ¿Son genuinos los datos, esto es, averiguados como bien establecidos, o son inventados, sacados de publicaciones o ajustados? ¿Existe alguna observación descartada discrecionalmente por el observador? ¿Existen datos espurios que tengan excesiva influencia en la inferencia estadística?

iv) ¿Cuál es la verdadera población para la que los datos proporcionan información? ¿Hay alguna "no-respuesta" (parcial o completa) en las unidades seleccionadas de la población sometida a inspección? ¿Pertenece los datos obtenidos a una población homogénea o a una mixta? ¿Están registrados todos los factores relevantes para la identificación y clasificación de las unidades de la muestra?

v) ¿Hay alguna información *a priori* sobre el problema objeto de la investigación o en la naturaleza de los datos observados?

Respuestas a estas preguntas pueden obtenerse hablando con la persona que ha recogido los datos; las más de ellas han de sacarse mediante adecuado análisis de datos: cuestiones dirigidas a los datos o empleo de *examen cruzado de datos*. Representaciones gráficas como histogramas, nubes de puntos, etc., adecuadas transformaciones de las medidas, cálculo de ciertos estadísticos y otras técnicas descritas en párrafos anteriores, pueden ayudar a la obtención de respuestas, pero la obtención de contestaciones consistentes, dentro de una lógica convincente, no puede abandonarse al seguimiento de una *rutina*. Mucho dependerá de la naturaleza de los datos y de la habilidad del estadístico para extraer información de los mismos.